

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ - OBOR GEODÉZIE A KARTOGRAFIE
KATEDRA VYŠŠÍ GEODÉZIE

název předmětu

VYŠŠÍ GEODÉZIE 21

číslo úlohy

4

název úlohy

GPS - zpracování kódových měření

školní rok

2002/03

semestr

7

skupina

64

zpracoval

Zdeněk Nejedlý

datum

24.11.2003

e-mail

rsc@email.cz

Zadání: K dispozici máte soubory 10092750.02o a 10002750.02o ve formátu RINEX obsahující data měřená přijímači GPS. Data jsou pořízena ve dnech 2. a 3.10.2002 (modifikované juliánské datum MJD = 52549 resp. 52550) na stanici 1009 a blízké stanici 1000.

Příklad 4.1

Využijte dat ze souboru 10092750.02o a spočtěte polohu stanice 1009 pomocí pseudovzdáleností získaných z P1-kódu na první nosné vlně. Použijte data pro dané epochy v časech t_1 , t_2 , t_3 a využijte měření na všechny družice. Kromě polohy určujte také opravu hodin přijímače. Jako apriorní přibližné souřadnice použijte těžiště Země (0, 0, 0) a nebo vhodnější hodnoty víte-li, že body leží poblíž Ondřejova. Polohu družic a opravy družicových hodin spočtěte na základě souborů s vysílanými navigačními údaji auto2750.02n a auto2760.02n.

Příklad 4.2

Vypočtěte polohu stanice 1000 relativně vzhledem k stanici 1009. Využijte k tomu obou souborů s měřenými daty, ze kterých vyjměte pseudovzdálenosti získané pomocí P1-kódu na první nosné vlně pro stejné časové okamžiky jako v příkladu 3.1. Vytvořte dvojité diferencovaná měření a ta vyrovnejte. Souřadnice bodu 1009 fixujte na hodnotách uvedených vypočtených v první části.

Vstupní soubory:

10092750.02o – <http://athena.fsv.cvut.cz/VG21/10092750.02O>

10002750.02o – <http://athena.fsv.cvut.cz/VG21/10002750.02O>

auto2750.02n – <http://athena.fsv.cvut.cz/VG21/auto2750.02n>

auto2760.02n – <http://athena.fsv.cvut.cz/VG21/auto2760.02n>

Číselné zadání:

epocha 1

$MJD = 52549$

$t = 78840 \text{ sec}$

epocha 2

$MJD = 52549$

$t = 80040 \text{ sec}$

epocha 3

$MJD = 52549$

$t = 81240 \text{ sec}$

Výpočet polohy přijímače z nediferencovaných kódových měření

Pro pseudovzdálenost (součin rychlosti světla c a tranzitního času Δt) mezi družicí i a přijímačem k platí vztah (1.01).

$$P_k^i(t) = c \cdot \Delta t = c \cdot (t_k(t) - t^i(t - \tau)) \quad (1.01)$$

kde: $t_k(t)$ je čtení hodin přijímače
 $t^i(t)$ je čtení hodin družice
 t je okamžik příjmu signálu
 τ je tranzitní čas

Zavedeme-li opravu z chodu hodin přijímače (1.02)

$$\delta_k(t) = t_k(t) - t \quad (1.02)$$

a opravu z chodu hodin družice (1.03)

$$\delta^i(t) = t^i(t) - t \quad (1.03)$$

$$\delta^i(t - \tau) = t^i(t - \tau) - (t - \tau) \quad (1.04)$$

kde: $t - \tau$ je čas vyslání signálu z družice

můžeme pseudovzdálenost napsat jako

$$\begin{aligned} P_k^i(t) &= c \cdot [t + \delta_k(t) - (t - \tau) - \delta^i(t - \tau)] = \\ &= c \cdot \tau + c \cdot \delta_k(t) - c \cdot \delta^i(t - \tau) = \rho_k^i(t) + c \cdot \delta_k(t) - c \cdot \delta^i(t - \tau) \end{aligned} \quad (1.05)$$

kde: $\rho_k^i(t)$ je délka průvodiče mezi přijímačem a družicí v čase t

nebo

$$P_k^i(t) = \sqrt{(x_k - x^i(t - \tau))^2 + (y_k - y^i(t - \tau))^2 + (z_k - z^i(t - \tau))^2} = c \cdot \delta_k(t) - c \cdot \delta^i(t - \tau) \quad (1.06)$$

Čas vyslání signálu můžeme poté určit z první části rovnice (1.05) iteračně jako

$$t - \tau = t_k(t) - \frac{P_k^i}{c} - \delta^i(t - \tau) \quad (1.07)$$

Tuto hodnotu poté použijeme k určení polohy družice, na niž je příslušná pseudovzdálenost měřena. Následně, známe-li polohu a vzdálenost na alespoň čtyři družice, můžeme určit polohu přijímače. Je-li družic více než čtyři, dojde navíc k vyrovnání.

Matice A má tvar

$$A_{([m_i], 3+e)} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_p^1(T_1^1) & b_p^1(T_1^1) & c_p^1(T_1^1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_p^2(T_1^2) & b_p^2(T_1^2) & c_p^2(T_1^2) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_p^{m_i}(T_1^{m_i}) & b_p^{m_i}(T_1^{m_i}) & c_p^{m_i}(T_1^{m_i}) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_p^i(T_2^i) & b_p^i(T_2^i) & c_p^i(T_2^i) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_p^i(T_j^i) & b_p^i(T_j^i) & c_p^i(T_j^i) & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \quad (1.08)$$

kde: j je číslo epochy
 i je číslo družice
 m_i je počet družic v příslušné epoše
 e je počet epoch měření na družice
 a, b, c jsou příslušné derivace:

$$a_p^i(T_j^i) = \frac{\partial \rho_p^i(T_j)}{\partial x} \bigg|_{(x_{p0}, y_{p0}, z_{p0})} = \frac{x_{p0} - x^i(T_j^i)}{\rho_{p0}^i(T_j)} \quad (1.09)$$

$$b_p^i(T_j^i) = \frac{\partial \rho_p^i(T_j)}{\partial y} \bigg|_{(x_{p0}, y_{p0}, z_{p0})} = \frac{y_{p0} - y^i(T_j^i)}{\rho_{p0}^i(T_j)} \quad (1.10)$$

$$c_p^i(T_j^i) = \frac{\partial \rho_p^i(T_j)}{\partial z} \bigg|_{(x_{p0}, y_{p0}, z_{p0})} = \frac{z_{p0} - z^i(T_j^i)}{\rho_{p0}^i(T_j)} \quad (1.11)$$

kde: x, y, z_{p0} je přibližná poloha přijímače
 T je čas vyslání signálu

Vektor l má pro jednu epochu tvar

$$l = \left(\begin{array}{c} \rho_{p0}^1(T_1) - P_p^1(T_1) - c \cdot \delta^1(T_1^1) \\ \rho_{p0}^2(T_1) - P_p^2(T_1) - c \cdot \delta^2(T_1^2) \\ \vdots \\ \rho_{p0}^{m_i}(T_1) - P_p^{m_i}(T_1) - c \cdot \delta^{m_i}(T_1^{m_i}) \\ \hline \vdots \end{array} \right) \quad (1.12)$$

Následně můžeme provést výpočet a vyrovnání:

$$Q = (A^T \cdot A)^{-1} \quad (1.13)$$

Vektor přírůstků přibližných souřadnic přijímače a oprav pseudovzdáleností

$$h = -Q \cdot A^T \cdot l = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ c \cdot \delta(t_1) \\ \vdots \\ c \cdot \delta(t_e) \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Vektor oprav zprostředkujících (pseudovzdáleností)

$$v = A \cdot h + l \quad (1.15)$$

Aposteriorní střední chyba jednotková

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{[m_i] - n}} \quad (1.16)$$

$$Q_l = A \cdot Q \cdot A^T \quad (1.17)$$

Střední chyby neznámých

$$m_x = m_0 \cdot \sqrt{\text{diag}(Q)} \quad (1.18)$$

Střední chyby zprostředkujících (pseudovzdáleností)

$$m_l = m_0 \cdot \sqrt{\text{diag}(Q_l)} \quad (1.19)$$

Výpočet polohy přijímače z diferencovaných kódových měření

Diference můžeme tvořit pro:

$$\begin{aligned} 1) \text{ dva přijímače} & \quad P_{ij}^k = P_j^k - P_i^k \\ 2) \text{ dvě družice} & \quad P_i^{kl} = P_j^l - P_i^k \\ 3) \text{ dva časy} & \quad P_i^k(t_1) = P_i^k(t_1) - P_i^k(t_2) \end{aligned}$$

Pro difference pomocí dvou přijímačů platí:

1. difference – rozdíl příslušných pseudovzdáleností (počítá se pro družice přítomné v obou etapách měření).

$$P_{ij}^k = P_j^k - P_i^k \quad (2.01)$$

Potlačí se vliv chyby hodin družice, potlačí se vliv chyby z neznalosti přesné polohy družice, vliv atmosféry a refrakce.

2. difference – výpočet z prvních diferencí. Jedna z nich se vezme jako referenční a odečte se od ostatních.

$$P_{ij}^{kl} = \rho_{ij}^{kl} = (\rho_i^k - \rho_j^k) - (\rho_i^l - \rho_j^l) \quad (2.02)$$

Potlačí se vliv chyby hodin přijímače. Z takto získaných měření (diferencí) mohou ale určit pouze relativní polohu přijímače. Následně mám-li šest a více dvojitych diferencí, mohou teoreticky provést výpočet. Díky krátké vzdálenosti mezi přijímači je ale úloha prakticky singulární a sloupce v matici A jsou lineárně závislé (derivace pro oba přijímače jsou až na znaménko prakticky totožné). Je proto třeba počítat souřadnice pouze jednoho přijímače, přičemž souřadnice druhého jsou fixovány na předem známé hodnotě. Počet neznámých a nutných měření (dvojitych diferencí) je poté tři.

Matrice A má pro jednu epochu měření tvar

$$A = \begin{pmatrix} \frac{x_{i0} - x^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{x_{i0} - x^2}{\rho_{i0}^2} & \frac{y_{i0} - y^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{y_{i0} - y^2}{\rho_{i0}^2} & \frac{z_{i0} - z^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{z_{i0} - z^2}{\rho_{i0}^2} \\ \frac{x_{i0} - x^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{x_{i0} - x^3}{\rho_{i0}^3} & \frac{y_{i0} - y^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{y_{i0} - y^3}{\rho_{i0}^3} & \frac{z_{i0} - z^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{z_{i0} - z^3}{\rho_{i0}^3} \\ \frac{x_{i0} - x^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{x_{i0} - x^4}{\rho_{i0}^4} & \frac{y_{i0} - y^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{y_{i0} - y^4}{\rho_{i0}^4} & \frac{z_{i0} - z^1}{\rho_{i0}^1} - \frac{z_{i0} - z^4}{\rho_{i0}^4} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad (2.03)$$

Vektor l se získá pomocí rozdílů druhých diferencí pseudovzdálenosti a délky průvodiče a má tvar

$$l = P_{ij}^{kl} - \rho_{ij}^{kl} \quad (2.04)$$

Následné vyrovnaní se provede podle vztahů (1.13) až (1.18), pouze aposteriorní střední chyba jednotková se vypočte podle vztahu

$$m_0 = \sqrt{\frac{v^T v}{[m_i] - n - 3}} \quad (2.05)$$

Přehled výsledků

poloha stanice 1009 určená pomocí pseudovzdáleností

$$\begin{array}{ll} X = 3978558.056 \text{ m} & m_x = 4.018 \text{ m} \\ Y = 1051245.917 \text{ m} & m_y = 2.251 \text{ m} \\ Z = 4857387.050 \text{ m} & m_z = 4.691 \text{ m} \end{array}$$

opravy pseudovzdáleností c.dT způsobených vlivem chodu hodin přijímače

$$\begin{array}{ll} c.dT_1 = -228.032 \text{ m} & m_{c.dT1} = 4.111 \text{ m} \\ c.dT_2 = -226.815 \text{ m} & m_{c.dT2} = 4.246 \text{ m} \\ c.dT_3 = -202.157 \text{ m} & m_{c.dT3} = 4.273 \text{ m} \end{array}$$

Aposteriorní střední chyba jednotková

$$m_0 = 5.101 \text{ m}$$

Měřené pseudovzdálenosti, jejich opravy a střední chyby

PRN	pseudovzdálenost [m]	v_i [m]	m_i [m]
6	22466355.673	2.376	2.280
23	22888002.066	-4.144	2.639
17	20420944.795	-0.355	2.476
3	23107341.679	-0.065	3.119
18	23316161.670	-0.599	3.224
15	20227945.897	4.536	2.451
2	22247712.161	5.720	2.310
22	20787839.982	-7.469	2.128
6	23084245.434	2.727	2.461
23	23076080.397	-2.676	2.799
17	20543151.805	-0.056	2.369
3	22441611.402	-0.520	2.784
18	22612260.601	-0.419	2.875
15	20089825.638	3.008	2.381
2	21848479.243	7.005	2.186
22	20731558.695	-9.070	2.182
6	23755875.950	2.230	2.810
23	23420821.804	-2.563	3.030
17	20804169.898	0.399	2.330
3	21832218.256	-1.042	2.473
18	22012988.032	-0.258	2.546
15	20116663.466	1.602	2.363
2	21583035.951	8.904	2.197
22	20858471.617	-9.271	2.374

poloha stanice 1000 určená pomocí pseudovzdáleností

$X = 3978557.505 \text{ m}$	$m_x = 4.018 \text{ m}$
$Y = 1051099.316 \text{ m}$	$m_y = 2.251 \text{ m}$
$Z = 4857480.190 \text{ m}$	$m_z = 4.692 \text{ m}$

poloha stanice 1000 určená relativně vzhledem k stanici 1009

$X = 3978557.372 \text{ m}$	$m_x = 0.149 \text{ m}$
$Y = 1051099.227 \text{ m}$	$m_y = 0.071 \text{ m}$
$Z = 4857480.229 \text{ m}$	$m_z = 0.184 \text{ m}$

Aposteriorní střední chyba jednotková

$m_0 = 0.201 \text{ m}$

Závěr:

Veškeré výpočty byly provedeny v programu Matlab.

Ze středních chyb výsledných souřadnic je patrné, že výpočet pomocí diferencovaných kódových měření je řádově přesnější než v případě měření nediferencovaných (i když souřadnice stanice 1000 určené pomocí diferencovaných i nediferencovaných měření se vzájemně liší zhruba o 10 cm).

Je to způsobeno tím, že nediferencovaná měření jsou ovlivněna velkým počtem chyb vzniklých při průchodu signálu z družice atmosférou. U diferencovaných měření je většina těchto chyb potlačena, ale přesnost výsledků je závislá na přesnosti fixovaného bodu.

Exapolis, dne 20.12.2003
Zdeněk Nejedlý

Zdeněk Nejedlý