3 Matematická redukce

3.1 Úvod

V matematické redukci se převádí šikmá vzdálenost po fyzikální redukci na délku geodetické křivky na povrchu elipsoidu resp. na kartografické ploše. Do matematické redukce se zahrnuje i vliv zakřivení trajektorie elektromagnetické vlny refrakcí. Do matematické redukce jsou zpravidla zahrnovány i tzv. topografické redukce (opravy centrační, opravy ze sklonu dálkoměru apod.), které zde nejsou popsány.

Poznámka: *Při výpočtech redukcí je nezbytně nutné dodržet přesnost odpovídající přesnosti měření. Pri výpočtu na požadovaný počet desetinných míst je třeba alespoň jedno desetinné místo pro výpočet přidat, v případě přenásobování délky různými koeficienty (například měřítky zkreslení) je nutné mít tyto koeficienty spočítané na dostatečný počet platných cifer (počet cifer délky +1).*

3.2 Schéma matematické redukce

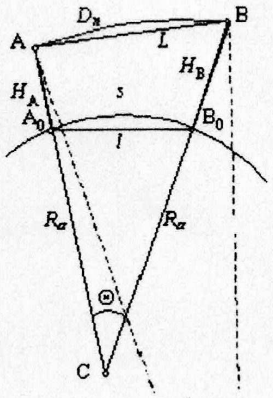
Budeme se zabývat matematickou redukcí vzdáleností do 60 km, což jsou prakticky největší délky měřené fázovými geodetickými elektronickými dálkoměry. Schéma úplné matematické redukce je toto:

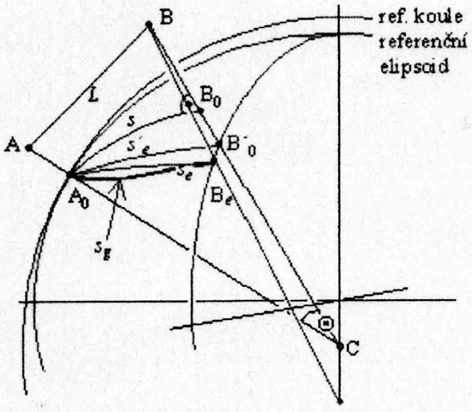
$$D_n \longrightarrow L \longrightarrow l \longrightarrow s \longrightarrow s_e' \longrightarrow s_e \longrightarrow s_g \longrightarrow s_p, \tag{9}$$

kde

- D_n je délka naměřená dálkoměrem se zavedenými přístrojovými korekcemi a po fyzikální redukci,
- L je přímá spojnice koncových bodu A, B délky,
- l je délka tětivy průmětu bodu A, B na referenční kouli,
- s je příslušný oblouk na referenční kouli,
- s_e' je průmět této délky do referenčního elipsoidu svislicemi bodu A, B k referenční kouli,
- s_e je délka normálového řezu daného normálou bodu A a bodem B,
- s_g je délka geodetické křivky mezi body elipsoidu A_0, B_0,
- s_p je délka s_g zobrazená do kartografické plochy.

V předchozím výkladu jste patrně nalezli množství dosud neznámých termínů. Spokojte se prozatím s vysvětlením, že tyto pojmy budete podrobně probírat v předmětu Vyšší geodézie. Obecně největší význam má termín - *geodetická křivka*, jako nejkratší spojnice dvou bodů na libovolné zakřivené ploše.





Pro praktický výpočet matematické redukce je důležitá skutečnost, že mnohé ze zde uvedených veličin jsou si velice blízké. Pro krátké délky prakticky splývají a jejich výpočet lze bez obav přeskocit, jak ukazuje následující tabulka:

$D_n \leq 60$ km: $\longrightarrow L \longrightarrow l \longrightarrow s \longrightarrow s_e \longrightarrow s_p$

$D_n \leq 20$ km: $\longrightarrow l \longrightarrow s \longrightarrow s_e \longrightarrow s_p$

$D_n \leq 10$ km: $\longrightarrow s \longrightarrow s_p$

V další tabulce je pak podle velikosti měřené vzdálenosti ukázáno, které dále uvedené vzorce je třeba užít:

$D_n \leq$ 60 km:	$L(10)$ $\longrightarrow$	$s(11)$ $\longrightarrow$	$s_e(18)$ $\longrightarrow$	$s_p(19)$
$D_n \leq$ 20 km:		$s(11)$ $\longrightarrow$	$s_e(18)$ $\longrightarrow$	$s_p(19)$
$D_n \leq$ 10 km:			$s(17)$ $\longrightarrow$	$s_p(19)$
$D_n \leq$ 6 km:			$s(17)$ $\longrightarrow$	$s_p(20)$
$D_n \leq$ 1 km:			$s(17)$ $\longrightarrow$	$s_p(21)$

3.3 Redukce $D_n \longrightarrow L$ (z refrakce)

$$L = D_n - (2k - k^2) \cdot \frac{D_n^3}{24R^2} = D_n - \Delta s_r, \tag{10}$$

kde

$R = 6380000$m je poloměr náhradní koule a k je refrakční koeficient, určený pro světelné dálkoměry při znalosti výškového rozdílu koncových bodů měřené vzdálenosti z jednostranně měřené vzdálenosti anebo z oboustranně měřených zenitových vzdáleností či přibližně odhadnutý z denní doby a povětrnostních podmínek:

den-jasno: $k = 0.13$

den,noc-zataženo: $k = 0.20$

noc-jasno: $k = 0.30$

Pro rádiové dálkoměry lze dosadit $k = 0.20$.

3.4 Redukce $L \longrightarrow s$ (z nadmořské výšky na referenční kouli)

$$s = \sqrt{\frac{L^2 - (H_A - H_B)^2}{(1 + \frac{H_A}{R_\alpha}) \cdot (1 + \frac{H_B}{R_\alpha})}} + \Delta s_k, \tag{11}$$

kde

> R_α je poloměr křivosti normálového řezu elipsoidu o azimutu α a H_A, H_B jsou nadmořské výšky koncových bodů (Výšky je vždy třeba zadávat včetně výšky stroje a výšky odrazného hranolu).

R_α je funkcí parametru elipsoidu, zeměpisné šírky bodu φ_A a azimutu. Určí se buď přímo z diagramu podle B. Delonga (bude k dispozici na cvičení), nebo výpočtem například podle vzorců:

$$R_\alpha = \frac{N}{1 + e'^2 \cdot cos^2\varphi \cdot cos^2\alpha}, \tag{12}$$

N je je příčný poloměr křivosti:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot sin^2\varphi}}, \tag{13}$$

e je hlavní excentricita elipsoidu:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.00667437223, \tag{14}$$

e' je vedlejší excentricita:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0.006719218798, \tag{15}$$

a a = 6377397.15508 m je hlavní poloosa. Číselné konstanty platí pro Besselův elipsoid použitý v zobrazení S-JTSK. Pro naše účely stačí R_α vypočítat s přesností na 0.1 km. Člen

$$\Delta s_k = \frac{D_n^3}{24R^2}, \tag{16}$$

vyjadřuje vliv zakřivení Země.

Poznámka: *Při praktickém výpočtu je třeba dát pozor na dosazování ve správných (tj. u všech veličin ve stejných) jednotkách. Pokud se neprováděly centrační výpočty, je nezbytné zavést výšky bodu A a B včetne výšek stroje a cíle. Vzorec (11) je třeba počítat nejméně na 10 platných cifer (5 cifer délka v m., chceme přesnost na mm, tj. musíme počítat na 0,1mm a jedna cifra jako rezerva).*

Pro délky kratší než 10 km lze použít zjednodušený vzorec (11):

$$s = \sqrt{\frac{D_n^2 - (H_A - H_B)^2}{1 + (\frac{H_A + H_B}{R})}}. \tag{17}$$

3.5 Redukce $s \rightarrow s_e$ (z referenční koule na elipsoid)

$$s_e = s - H_B \cdot \frac{D_n}{R} \cdot e'^2 \cdot cos^2\varphi_A \cdot cos^2\alpha = s - \Delta s_e, \tag{18}$$

3.6 Redukce $s, s_e \rightarrow s_p$ (z kartografického zobrazení)

$$s_p = s_e \cdot \frac{1}{6} \cdot (m_A + 4m_M + m_B), \tag{19}$$

$$s_p = s_e \cdot \frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B), \tag{20}$$

$$s_p = s_e \cdot m_A, \tag{21}$$

kde

m jsou měřítka zkreslení S-JTSK pro koncové (A, B) a střední bod (M) měřené délky. Měřítko získáme z přibližných souřadnic bodu vypočtením vzdálenosti od počátku souřadnicové soustavy ($R = \sqrt{Y^2 + X^2}$) a následnou interpolací v tabulce (je k dispozici na cvičení) nebo vyčíslením z řady:

$$\begin{aligned} m &= 0.9999 + 10^{-14} \cdot \Delta R^2 \cdot (1.22822 - \Delta R \cdot 10^{-7} \cdot \\ &\quad \cdot (3.154 - \Delta R \cdot 10^{-6} \cdot (1.848 - \Delta R \cdot 10^{-6} \cdot 1.15))), \qquad (22) \\ \Delta R &= R - R_0 = R - 1298039m. \qquad (23) \end{aligned}$$

Souřadnice středního bodu získáme zprůměrováním souřadnic bodů koncových. Nelze průměrovat vzdálenost od počátku R. Souřadnice se pro výpočet zaokrouhlují na dekametry.

3.7 Alternativní výpočet matematické redukce

Univerzální postup výpočtu matematické redukce[1] pro jakékoliv kartografické zobrazení vychází z následující úvahy:
Z přibližných souřadnic (v rovině kartografického zobrazení) koncových bodů délky spočítáme vzdálenost l^0_{red}, která je v podstatě již zredukovaná. K této vzdálenosti hledáme fiktivní měřenou délku l^0_{mer}. Z rovinných souřadnic a výšky bodu vypočteme pomocí zobrazovacích rovnic[2] zeměpisné souřadnice (φ, λ, H_{el}), které převedeme na kartézské souřadnice (X, Y, Z). Z kartézských souřadnic můžeme přímo vypočítat fiktivní měřenou délku l^0_{mer}. Redukovanou délku s_{red} k námi měřené délce s_{mer} vypočteme pomocí následujícího poměru:

$$\frac{s_{red}}{s_{mer}} = \frac{l^0_{red}}{l^0_{mer}}. \tag{24}$$

[1]Postup byl navržen prof. L.Mervartem a Ing.Z.Lukešem z katedry Vyšší geodézie.

[2]Postup výpočtu rovinných souřadnic, v konrétním kartografickém zobrazení, ze zeměpisných souřadnic.