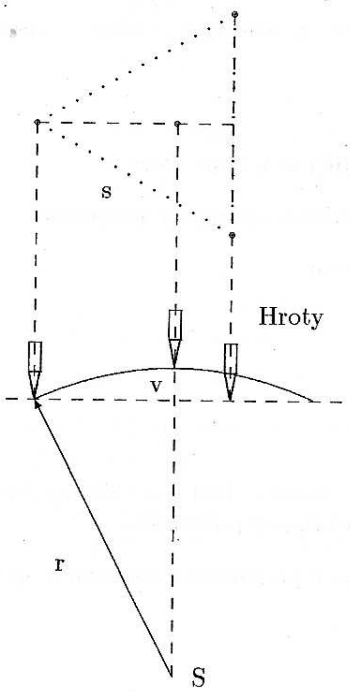
7 MĚŘENÍ MECHANICKÝCH VELIČIN

7.1 Stanovení optické mohutnosti čoček sférometrem



Měření sférometrem

Poloměr křivosti r obecné křivky v určitém bodě je dán poloměrem oskulační kružnice, která se dotýká křivky v tomto bodě.

U obecně zakřivených ploch zavádíme střední poloměr křivosti v daném bodě jako průměrnou hodnotu poloměrů křivosti dvou křivek vzniklých jako průsečnice studované plochy a dvou vzájemně kolmých rovin jdoucích daným bodem.

K měření poloměru křivosti se používá sférometr, který je popsán v odstavci 1 kapitoly D prvního dílu skript. Měření poloměru křivosti kulové plochy sférometrem je schematicky znázorněno na vedlejším obrázku, kde s je vzdálenost pevných hrotů sférometru, r je poloměr křivosti a v je výška kulového vrchlíku

$$v = h - h_o \ . \tag{87}$$

Hodnotu h_o udává sférometr položený na rovnou plochu (planum), h udává sférometr při měření na kolové ploše. Z geometrické situace zachycené na vedlejším obrázku lze odvodit vztah pro poloměr křivosti

$$r = \frac{s^2}{6v} + \frac{v}{2} \ . \tag{88}$$

Pro spojnou optickou čočku s indexem lomu n a tloušťkou d omezenou kulovými plochami o poloměrech křivosti r_1 a r_2 můžeme vypočítat hodnotu optické mohutnosti D, což je převrácená hodnota ohniskové vzdálenosti f

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) - \frac{(n-1)^2}{n}\frac{d}{r_1 r_2} \ . \tag{89}$$

Úkol: U dvou vybraných spojných čoček určete sférometrem poloměry křivosti jejich hraničních ploch a příslušné optické mohutnosti.

Pomůcky:

a) Sférometr.

b) Planum (rovinná skleněná deska).

c) Posuvné měřítko.

d) Spojné čočky.

Tabulka 5: Tabulka pro záznam měření.

n	s_1/mm	s_2/mm/	s_3/mm	h_o/mm	h_1/mm	h_2/mm	h_1'/mm	h_2'/mm
1								
2								
3								
..	..	..	..	..	..	..	..	..

Postup měření:

a) Sférometr postavíme hroty na planum a na deseti různých místech naměříme hodnoty h_o. Odhadujeme tisíciny milimetru.

b) Dále sférometr umístíme na jednu z hraničních kulových ploch první vybrané spojné čočky a zjistíme 10 hodnot h_1. Analogická měření provedeme i na druhé hraniční ploše této čočky a obdržíme 10 hodnot h_2. Stejná měření uskutečníme také pro druhou vybranou čočku, čímž získáme další dvě desetičlenné sady hodnot h_1' a h_2'.

c) Vzdálenosti hrotů nejlépe zjistíme jejich otisknutím do papíru a změřením posuvným měřítkem. Každou stranu s trojúhelníka měříme 5x, tj. celkem 15 hodnot vzdáleností hrotů. Odhadujeme i setiny milimetru.

d) Tloušťku čoček d a index lomu skla n nalezneme na vývěsce v laboratoři.

Zpracování naměřených údajů:

a) Určete průměrné hodnoty všech měřených veličin, tj. s, h_o, h_1, h_2, h_1', h_2'.

b) Určete výšky vrchlíků v_1, v_2, v_1', v_2' dle vztahu (87).

c) Určete poloměry křivosti r_1, r_2, r_1', r_2' dle vztahu (88).

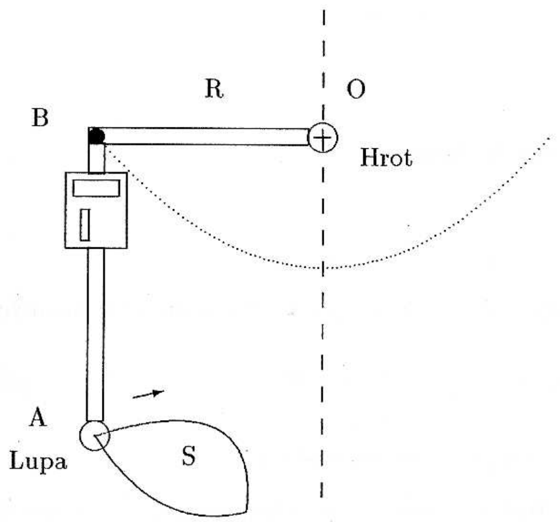
d) Určete optické mohutnosti D, D' obou čoček dle vztahu (89).

e) Vypočítejte pravděpodobnou absolutní ϑ a relativní ϱ chybu všech přímo měřitelných veličin a výsledných optických mohutností.

7.2 Stanovení plošného obsahu přímou metodou a planimetrem

Stanovení plošného obsahu přímou metodou. Ke stanovení plochy měřených obrazců přímou metodou je třeba pořídit průhledné kopie obrazců např. vystřižením z průhledného papíru. Položíme-li nyní průhledné kopie na milimetrový papír, můžeme snadno zjistit počet N_c *celých* cm^2 uvnitř plochy obrazce a počet N_n *necelých* cm^2 přes které prochází obrys obrazce. Je-li měřená plocha menší než 5 cm^2, volíme raději — kvůli větší přesnosti — menší měrnou jednotku např. mm^2, tj. počítáme počet celých a necelých mm^2. Přibližná plocha je pak dána efektivním počtem N_e zvolených plošných měrných jednotek. Efektivní počet plošných jednotek získáme následovně

$$N_e = N_c + \frac{1}{2} N_n \quad . \tag{90}$$



Amslerův polární planimetr.

Stanovení plošného obsahu planimetrem. Vodicí křivkou Amslerova polárního planimetru je kružnice poloměru R (viz obrázek). Konstrukce je provedena tak, že konec B ramene $\overline{AB}$ má buď kloub, nebo kulový čep, jímž je spojen s ramenem délky R opatřeným na druhém konci masivním hrotem, který se uchytí do podložky v bodě O. Tím je kloub B vázán na kružnici opsanou kolem pólu O. Polohu pólu O budeme volit mimo měřenou plochu S. Na raménku $\overline{AB}$ poblíž kloubu B je umístěn otočný bubínek, jehož obvod je rozdělen na 100 stejných dílků a opatřený noniem (viz kapitola D, odstavec 1 prvního dílu skript). Celé otáčky bubínku jsou zaznamenávány na pohyblivém číselníku. Raménko $\overline{AB}$ má u konce A čočku, v jejímž středu je bodový terčík, pomocí kterého můžeme přesně sledovat obrys měřené plochy S. Při pohybu ramene $\overline{AB}$ podél obrysu měřené plochy S se bubínek otáčí. Počet otáček Δd po objetí celé plochy je přímo úměrný velikosti plochy S

$$\Delta d = \alpha\, S \quad . \tag{91}$$

Konstanta úměrnosti α je závislá na délce obou ramen. Během měření se délka ramen nesmí měnit.

Úkol: Pomocí polárního planimetru a přímou metodou stanovte plochy dvou předkreslených obrazců a proveďte srovnání výsledků.

Pomůcky:

a) Měřené obrazce.

b) Planimetr.

c) Průhledný papír.

Postup měření:

a) Zjistíme konstantu α planimetru, tj. provedeme cejchování planimetru. Připravený plošný normál $S_o = 100$ cm^2 objedeme 10x a po každém objetí zapíšeme hodnotu d_o do tabulky 6. Pro konstantu planimetru platí

$$\alpha = \frac{\triangle d_o}{S_o} \quad , \tag{92}$$

kde $\triangle d_o$ je průměrná hodnota na jedno objetí zjištěná postupnou metodou (viz tab. 6).

b) Stejná měření provedeme pro první a druhý měřený (neznámý) obrazec a příslušné hodnoty d_1 a d_2 zapisujeme do tabulek analogických jako v případě plošného normálu.

Tabulka 6: Tabulka pro záznam měření — postupná metoda.

n	d_o/dílek	N	d_o/dílek	$5\triangle d_o$/dílek
1		6		
2		7		
3		8		
..	..	..	..	..

c) Z průhledného papíru vystřihneme kopie obou měřených obrazců.

Zpracování naměřených údajů:

a) Pomocí postupné metody určete průměrné hodnoty $\triangle d_1$ a $\triangle d_2$ a vypočítejte velikosti neznámých ploch

$$S_i = \frac{d_i}{\alpha} \quad , \qquad \text{resp.} \qquad S_i = \frac{S_o}{d_o} d_i \quad , \qquad i = 1,\ 2 \ . \tag{93}$$

b) Vypočítejte absolutní a relativní chyby měřených veličin a výsledných ploch.

c) Vystřižené obrazce podložte milimetrovým papírem (nebo překreslete na milimetrový papír) a zjistěte počet celých a necelých vybraných plošných jednotek připadajících na obrazce. Plochu stanovte pomocí efektivního počtu podle rovnice (90). Plošnou analýzu přímé metody není třeba zaznamenávat do tabulky.

d) Proveďte porovnání výsledků obou metod.

7.3 Stanovení hustoty pevných látek přímou metodou a na hydrostatických vahách.

Stanovení hustoty pevných látek přímou metodou

Pokud má pevné těleso o hmotnosti m a objemu V pravidelný geometrický tvar, je možné určit jeho objem přímým výpočtem z jeho rozměrů a jeho hmotnost lze určit na základě vážení. Hustota je pak dána vztahem

$$\varrho = m/V \quad . \tag{94}$$

Pro účel měření hustoty budou v laboratoři k dispozici tělíska z různých materiálů ve tvaru válečku a hranolku.

Úkol: Stanovte přímou metodou hustotu dvou různých těles vybraných z laboratorní sady.

Pomůcky:

a) Automatické váhy k rychlému předvážení, mechanické laboratorní váhy.

b) Sada kovových a umělohmotných těles.

c) Posuvné měřítko, mikrometr.

Postup měření:

a) Průměr válečku měříme 20x mikrometrem s přesností na tisíciny milimetru. Ostatní rozměry těles měříme 10x posuvným měřítkem s přesností na setiny milimetru a zapisujeme do tabulky 7.

b) Hmotnost tělesa určíme vážením na mechanických laboratorních vahách (rychlé předvážení provedeme na automatických vahách). Těleso vážíme jedenkrát. Chybu hmotnosti určíme z citlivosti vah, která je uvedena v laboratoři.

Tabulka 7: Tabulka pro záznam měření — hustota přímou metodou.

	Váleček		Hranolek		
n	r/mm	h/mm	a/mm	b/mm	c/mm
1					
2					
..	..	..	..	..	..
	$m_1 = \ldots$ g		$m_2 = \ldots$ g		

Zpracování naměřených údajů:

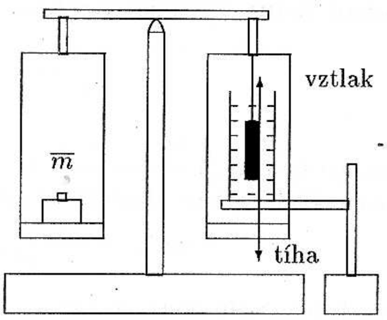
a) Vypočítejte průměrné hodnoty z rozměrů těles a z těchto průměrných hodnot stanovte objemy a hustoty (viz rovnice 94) měřených těles.

b) Stanovte absolutní a relativní chyby měřených veličin, hmotností (z citlivosti použitých vah), objemů a výsledných hustot.

Stanovení hustoty pevných látek na hydrostatických vahách

Tato metoda je založena na vážení pevného tělesa na vzduchu (hmotnost m) a ve vodě (hmotnost $\overline{m}$), kde je nadlehčováno vztlakovou silou, jejíž hodnotu lze určit z Archimedova zákona (viz následující obrázek). Označíme-li hustotu vody $\overline{\varrho}$ pak hustota ϱ zkoumaného tělesa je dána následovně

$$\varrho = \overline{\varrho}\frac{m}{m-\overline{m}} \quad . \tag{95}$$



Hydrostatické váhy

Úkol: Pomocí hydrostatických vah určete hustoty dvou těles vybraných v předešlém přímém měření.

Pomůcky:

a) Hydrostatické váhy.
b) Sada závaží.
c) Dvě zkoumaná tělesa stejná jako v předešlém měření.

Postup měření:

a) Tělesa vážíme na vzduchu (m).
b) Tělesa vážíme ve vodě na hydrostatických vahách ($\overline{m}$).

Zpracování naměřených údajů:

a) Hustotu stanovíme podle vztahu (95).

b) Chybu hmotností stanovíme z citlivosti laboratorních vah (uvedena na vývěsce v laboratoři). Uvažujeme-li chybu v určení teploty vody 0.1 °C, pak pomocí fyzikálních tabulek určíme odchylku hustoty vody, která přísluší této teplotní změně, a bereme ji za přibližnou chybu hustoty vody.

c) Určíme výslednou chybu hustoty měřených těles.

7.4 Stanovení statického a dynamického koeficientu smykového tření dřevěných materiálů

Smýkají-li se dvě pevná tělesa po sobě, působí proti jejich vzájemnému pohybu tření, které se podle Amonton-Coulombova zákona vyznačuje třemi základními vlastnostmi:

a) Třecí síla T je přímo úměrná tlakové síle N, jíž jsou třené povrchy k sobě přitlačovány

$$T = \mu N \quad , \tag{96}$$

přičemž konstanta úměrnosti μ se nazývá koeficient smykového tření.

b) Koeficient μ je nezávislý na velikosti třecích ploch.

c) Koeficient μ je nezávislý na rychlosti pohybu.

Koeficient smykového tření závisí pouze na materiálu a vlastnostech povrchu obou třecích ploch.

U smykového tření musíme rozlišovat mezi *statickou* μ_s a *dynamickou* μ_d hodnotou koeficientu tření. Tento rozdíl vyplývá z odlišných hodnot třecí síly (96), kterou musíme překonávat při uvádění tělesa z klidu do pohybu $T = \mu_s N$ nebo při udržování samotného pohybu $T = \mu_d N$. Při uvádění tělesa z klidu do pohybu překonáváme větší adhezní sílu působící mezi dvěma povrchy, a proto platí

$$\mu_s > \mu_d \quad , \tag{97}$$

$$\mu_s = \frac{T_s}{N} \quad , \tag{98}$$

$$\mu_d = \frac{T_d}{N} \quad . \tag{99}$$

Pro měření koeficientů smykového tření se používají přístroje zvané *tribometry*:

a) Tribometr vodorovný se skládá z vodorovné desky a po ní se smýkajícího tělesa spojeného přes kladku s miskou, na kterou klademe závaží. Deska i těleso jsou vyměnitelné a zhotovují se vždy z toho materiálu, jehož vlastnosti tření chceme určit.

b) Tribometr sklonný je zařízení, které umožňuje vyšetřovat pohyb smýkaného tělesa jako pohyb po nakloněné rovině. Zařízení je konstruováno tak, že je možno měnit úhel α sklonu této nakloněné roviny. Z rozkladu tíhové síly $G = mg$ působící na těleso o hmotnosti m umístěné na nakloněné rovině dostáváme pohybovou složku $F = mg \sin\alpha$ a tlakovou složku $N = mg \cos\alpha$. Při rovnoměrném pohybu tělesa po nakloněné rovině je třecí síla T_d v rovnováze s pohybovou složkou F, tj. $T_d = F$, a ze vztahu (99) pak dostáváme

$$\mu_d = \tan(\alpha_d) \quad , \tag{100}$$

kde α_d je úhel nakloněné roviny, při kterém se těleso sune rovnoměrným pohybem. Podobně platí pro statický koeficient smykového tření

$$\mu_s = \tan(\alpha_s) \quad , \tag{101}$$

kde α_s je *nejmenší* úhel sklonného tribometru, při kterém se právě uvede těleso do pohybu.

Úkol: pomocí sklonného tribometru určete:

a) hodnotu statického a dynamického koeficientu smykového tření mezi dřevěnými povrchy

b) a ověřte *nezávislost* obou koeficientů smykového tření na velikosti tlakové síly.

Pomůcky:

a) Sklonný tribometr.

b) Dřevěné těleso.

c) Závaží 100 g.

Postup měření:

Statický součinitel smykového tření

a) Ustavíme sklonný tribometr do vodorovné polohy.

b) Postavíme dřevěný hranolek plochou A (označena na tělese) na dřevěný povrch sklonného tribometru a pomocí *hrubého* posuvu zvětšujeme úhel sklonu α. Posouváme *velmi zvolna* zejména v oblasti kritického úhlu, abychom se vyhnuli sebemenším nárazům, které by uvedly předčasně hranolek do pohybu po nakloněné rovině tribometru. Úhel, při kterém se dá hranolek právě do pohybu, zapíšeme do tabulky 8. Tribometr sklopíme zpět do vodorovné polohy a celý úkon opakujeme desetkrát. Hranolek klademe na různá místa tribometru.

c) Měření popsané v odstavci b) opakujeme se závažím 100 g zasunutým do otvoru v hranolku.

Statické měření		
N	Plocha A	
	S přívažkem	Bez přívažku
	α_s^o	α_s^o
1		
2		
..	..	..

Tabulka 8: Tabulka pro záznam statického měření.

Dynamické měření		
	Plocha A	
n	S přívažkem	Bez přívažku
	α_d^o	α_d^o
1		
2		
..	..	..

Tabulka 9: Tabulka pro záznam dynamického měření.

Dynamický součinitel smykového tření

d) Pomocí *hrubého* posuvu nastavíme libovolný úhel a na pohyblivou desku tribometru položíme plochou A hranolek. Pokud se nedá do pohybu, udělíme mu jemný impuls a sledujeme, zda je jeho pohyb **rovnoměrný**. V případě, že pohyb je zrychlený, zmenšíme úhel sklonu hrubým posuvem o jistou *malou* hodnotu. Je-li pohyb zpožděný, tj. hranolek se zastavuje, úhel sklonu zvětšíme. Takto se postupně přibližíme ke kritické hodnotě úhlu α_d, kterou zapíšeme do tabulky 9. U tohoto úhlu zůstaneme a dále již používáme pouze *jemný* posuv ($\sim$ 1.5 otáčky $\sim$ 0.1°). Úhel nejdříve pomocí jemného posuvu postupně zmenšujeme a píšeme si všechny hodnoty α_d, dokud se pohyb nestane nerovnoměrným (trhavým). V takovém případě opět úhel sklonu jemně zvětšujeme. Hranolek klademe na různá místa tribometru. Toto měření ukončíme po desáté získané hodnotě α_d.

e) Měření popsané v odstavci e) opakujeme se závažím 100 g zasunutým do otvoru v hranolku.

f) Hranolek zvážíme.

Zpracování naměřených údajů:

a) Vypočítejte průměrné hodnoty a střední pravděpodobné chyby pro statické a dynamické úhly α_s a α_d z tabulek 8 a 9.

b) Pomocí vztahů (100) a (101) zjistěte hodnoty statických a dynamických koeficientů smykového tření μ_s a μ_d a jim odpovídající chyby měření.

c) Prověřte, zda je možné s ohledem na stanovené chyby měření považovat statický a dynamický koeficient smykového tření za nezávislý na velikosti tlakové síly.

7.5 Stanovení modulu pružnosti v tahu přímou metodou

Namáháme-li nějaké těleso tahem, deformuje se. Tato deformace ε je až po mez úměrnosti přímo úměrná deformačnímu napětí σ

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \quad , \tag{102}$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu. Deformací ε rozumíme relativní délkové prodloužení

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_o} \quad , \tag{103}$$

kde l_o značí původní délku a Δl prodloužení měřeného tělesa — v našem případě ocelového drátu o průměru d. Napětí σ je poměr velikosti deformující síly F a plošného průřezu S vzorku

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad , \qquad S = \pi d^2/4. \tag{104}$$

Dosazením rovnic (102) a (103) do vztahu (104) obdržíme

$$E = \frac{4 l_o}{\pi d^2 a} \quad , \qquad kde \ \ a = \frac{\Delta l}{F} \quad . \tag{105}$$

Symbol a představuje prodloužení tělesa při zatížení jednotkovou silou. Pokud studujeme malé deformace (do meze úměrnosti, kdy ještě platí Hookův zákon) je tato veličina konstantní a představuje směrnici v lineární závislosti

$$\Delta l = aF + b \quad , \tag{106}$$

kde b je hodnota počátečního prodloužení. Je-li počáteční prodloužení přibližně nulové, platí zjednodušená rovnice

$$\Delta l \approx aF \quad . \tag{107}$$

Měřící zařízení sestává z tenkého, dlouhého ocelového drátu umístěného ve svislé poloze, jehož horní konec je upevněný a na druhém konci je zavěšená miska se závažím. Prodlužování drátu je přenášeno na indikátorové hodinky, které měří hodnoty Δl.

Úkol: Zjistěte hodnotu Youngova modulu pružnosti v tahu ocelového drátu.

Pomůcky:

a) Měřící zařízení s indikátorovými hodinkami.

b) Sada závaží.

c) Mikrometr.

Tabulka 10: Tabulka pro záznam měření.

n	d/mm	N	m/kg	F/N	Δl_1/mm	Δl_2/mm	$\Delta l = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_2)$/mm
1		1	0				
2		2	0.5				
3		3	1.0				
..	..	..	..	..	..	..	..

Postup měření:

a) Mikrometrem změřte 10x průměr namáhaného drátu d. Odhadujte tisíciny milimetru.

b) Do tabulky (10) zapište počáteční hodnotu prodloužení drátu. Závaží přidávejte po 0.5 kg a zapisujte hodnoty prodloužení Δl_1. Měření provádějte až do vyčerpání celé sady závaží.

c) Stejné měření provádějte při klesajícím zatížení a do tabulky zapisujte hodnoty Δl_2.

d) Délku drátu l_o naleznete na vývěsce v laboratoři.

Zpracování naměřených údajů:

a) Sestrojte graf závislosti $\Delta l = f(F)$ a ověřte, zda jste měření prováděli v oblasti malých deformací.

b) Pokud jste měření prováděli v oblasti malých deformací, pak ze závislosti (106) resp. (107) nalezněte pomocí metody nejmenších čtverců hodnotu směrnice a a použijte ji pro výpočet modulu pružnosti v tahu E (105).

c) Vypočítejte absolutní a relativní chybu výsledku a hodnotu E srovnejte s hodnotou modulu pružnosti v tahu oceli z fyzikálních tabulek.

7.6 Tenzometrické a mechanické měření modulu pružnosti v tahu z průhybu statickou metodou

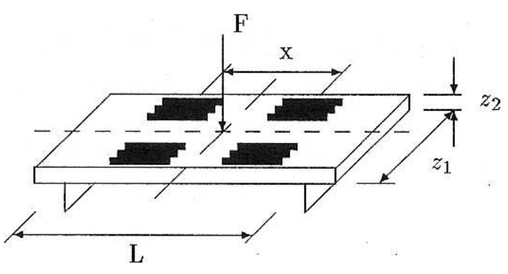
Tenzometrická metoda

V praxi se používá tenzometrických měření k určení statické i dynamické deformace u mostních konstrukcí, budov, strojů, strojních zařízení a jiných namáhaných objektů a prvků. Podstatou klasické tenzometrické metody je měření změn elektrické rezistance drátkových nebo fóliových čidel, která jsou pevně nalepena na namáhaný objekt, takže vykazují stejná relativní prodloužení nebo zkrácení jako tento objekt. Změna délky čidel vede ke změně jejich rezistance. Rezistanční změny se registrují pomocí napěťových změn v diagonále Wheatstoneova můstku, do kterého jsou tenzometrická čidla zapojována.

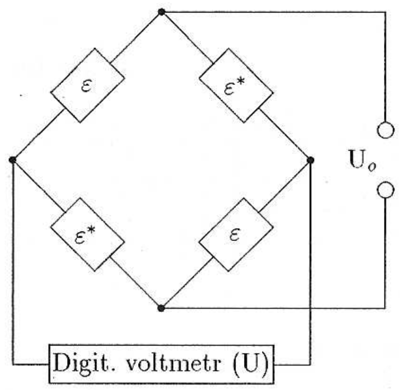
K našemu měření je použit profil podepřený v krajních polohách a zatížený uprostřed silou F (viz připojený obrázek). Osm tenzometrických pásek je rozmístěno symetricky kolem středu profilu, z toho čtyři tenzometry jsou umístěny na horní straně a čtyři tenzometry na dolní straně profilu. Mechanické napětí σ ve středech tenzometrických čidel je dáno následovně

$$\sigma = \frac{3}{2}\frac{F(L-x)}{z_1 z_2^2} \quad , \qquad (108)$$

kde F je zatěžovací síla, L rozteč podpěr, x rozteč středů tenzometrických pásek, z_1 je šířka profilu a z_2 jeho výška.



Nosník s tenzometry.



Wheatstoneův most

Měření se provádí pomocí stejnosměrného Wheatstoneova můstku (viz obrázek) v nerovnovážném režimu, tj. snímá se diagonální napětí U v závislosti na deformaci ε (resp. zkrácení ε^*) rezistančních tenzometrů během zatěžování a odlehčování profilu. Pro napětí U platí

$$U = k\varepsilon U_o \quad . \qquad (109)$$

U_o je napájecí napětí a k je konstanta tenzometru, tzv. k-faktor udávaný výrobcem.

Pro jednoosou napjatost můžeme psát Hookův zákon ve tvaru

$$\sigma = E\varepsilon \quad . \qquad (110)$$

Dosazením vztahů (108) a (109) do vztahu (110) obdržíme

$$U = \frac{3k(L-x)U_o}{2z_1 z_2^2 E}F \quad . \qquad (111)$$

V souřadném systému (x=F;y=U) jde o rovnici přímky se směrnicí a

$$U = aF \quad , \qquad a = \frac{3k(L-x)U_o}{2z_1 z_2^2 E} \quad , \qquad (112)$$

takže pro Youngův modul pružnosti v tahu platí

$$E = \frac{3k(L-x)U_o}{2z_1 z_2^2 a} \quad . \qquad (113)$$

Mechanické měření z průhybu

Postupným zatěžováním profilu silou F (viz obrázek profilu s tenzometry) narůstá průhyb y v jeho středu

$$y = \frac{L^3}{4z_1 z_2^3 E} F \ , \tag{114}$$

což je rovnice přímky se směrnicí α

$$y = \alpha F \ , \qquad \alpha = \frac{L^3}{4z_1 z_2^3 E} F \ . \tag{115}$$

Pro hodnotu modulu pružnosti v tahu E dostáváme

$$E = \frac{L^3}{4z_1 z_2^3 \alpha} \ . \tag{116}$$

Úkol: Zjistěte hodnotu Youngova modulu pružnosti v tahu E z průhybu pro dřevěný profil, a to tenzometrickou i mechanickou metodou.

Pomůcky:

a) Stabilizovaný zdroj stejnosměrného napětí U_o (0 – 20 V).

b) Digitální voltmetr.

c) Nosník s instalovanými tenzometry, Wheatstoneovým můstkem a indikátorovými hodinkami.

d) Svinovací metr, posuvné měřítko a mikrometr.

Tabulka 11: Tabulka pro záznam měření.

n	Závaží m/kg	Zatěž. síla F/N	Elektrické napětí U/mV				Průhyb y/mm			
			Zatěž.	Odlehč.	Průměr	Korekce na nulu	Zatěž.	Odlehč.	Průměr	Korekce na nulu
1										
2										
3										
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..

Postup měření:

a) Změřte 10x šířku profilu z_1.

b) Změřte 20x tloušťku nosníku z_2.

c) Změřte 10x rozteč podpěr L.

d) Poznamenejte si rozteč středů tenzometrických pásek x a hodnotu k-faktoru tenzometrů (oba údaje naleznete na vývěsce v laboratoři).

e) Poznamenejte si hodnotu stejnosměrného napětí U_o, které používáte k napájení Wheatstoneova můstku.

f) Měřte elektrické napětí U a průhyb y v závislosti na zatížení F — zatížení zvětšujte postupně o jednotlivé přívažky ze sady závaží, která bude přiložena k úloze. Při odlehčování nosníku odebírejte přívažky v opačném pořadí. Po každé změně zatížení je třeba vyčkat alespoň několik sekund na ustálení napětí U. Naměřené hodnoty zapisujte do tabulky 11.

Zpracování naměřených údajů:

a) Vyneste grafy $U(F)$ a $y(F)$. Stanovte hodnotu směrnic
   (i) graficky

$$a = \frac{\Delta U}{\Delta F} \ , \qquad \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta F} \ , \tag{117}$$

   (ii) numericky metodou nejmenších čtverců.

b) Z numericky získaných hodnot směrnic a a α vypočítejte modul pružnosti E podle vztahů (113) a (116).

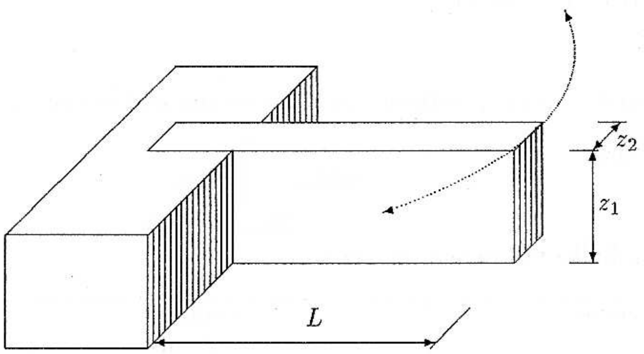
c) Stanovte výslednou chybu měření (absolutní i relativní) a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

7.7 Stanovení modulu pružnosti v tahu z příčných kmitů tyče

Vnější síla $\vec{F}_e$ působící na volném konci jednostranně vetknuté tyče způsobí výchylku $\vec{u}$, pro kterou z teorie pružnosti plyne vztah

$$\vec{u} = \frac{3L^3}{EJ}\vec{F}_e \ , \qquad J = \frac{z_1 z_2^3}{12} \ , \tag{118}$$

kde J je moment setrvačnosti průřezu vzhledem k ose jdoucí těžištěm průřezu kolmo k působící vnější síle $\vec{F}_e$ a ležící v rovině průřezu, z_1 a z_2 jsou rozměry průřezu (viz obrázek), L je délka volného konce tyče a E je modul pružnosti v tahu materiálu, z něhož je tyč zhotovena.



Příčné kmity tyče.

Koná-li tyč samovolný kmitavý pohyb, pak pružná vnitřní síla $\vec{F}_i$ s působištěm na jejím konci je přímo úměrná výchylce $\vec{u}$ z rovnovážné polohy a má vzhledem k ní opačný směr

$$\vec{F}_i = m_r \vec{a} = -\frac{E z_1 z_2^3}{4L^3}\vec{u} \ , \tag{119}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{u} \ , \qquad \omega = \frac{2\pi}{T^2} \ , \tag{120}$$

kde $\vec{a}$ je zrychlení kmitavého pohybu, ω je kruhová frekvence, T je perioda kmitů a m_r tzv. redukovaná hmotnost tyče. Důvod zavedení redukované hmotnosti vyplývá ze skutečnosti, že tyč je na jednom konci upevněna, takže se při kmitání neuplatňují všechny body stejně. Redukovaná hmotnost je menší než skutečná hmotnost tyče.

Ze vztahů (119) a (120) plyne pro hledaný modul pružnosti v tahu

$$E = \frac{16\pi^2 L^3 m_r}{z_1 z_2^3 T^2} \ . \tag{121}$$

Tento vztah však obsahuje redukovanou hmotnost m_r, kterou nelze určit přímo vážením, avšak lze ji ze vztahu vyloučit pomocí měření s přídavným tělesem o skutečné hmotnosti m_p. Pokud je takové těleso připevněno na tyč tak, aby jeho těžiště bylo právě na konci tyče, změní se perioda kmitů $\overline{T}$ a pro modul pružnosti bude nyní platit

$$E = \frac{16\pi^2 L^3 (m_r + m_p)}{z_1 z_2^3 \overline{T}^2} \ . \tag{122}$$

Vzájemným vydělením obou vztahů (121) a (122) a další jednoduchou úpravou obdržíme konečný vztah pro E, který již neobsahuje redukovanou hmotnost

$$E = \frac{16\pi^2 L^3 m_p}{z_1 z_2^3 (\overline{T}^2 - T^2)} \ . \tag{123}$$

Úkol: Zjistěte Youngův modul pružnosti v tahu E kovové tyče, která koná příčné kmity.

Pomůcky:

a) Svinovací metr.

b) Posuvné měřítko.

c) Mikrometr.

d) Stopky.

Postup měření:

a) Svinovacím metrem změřte 10x délku L volného konce tyče.

b) Posuvným měřítkem změřte 10x výšku z_1 tyče.

c) Mikrometrem změřte 20x šířku z_2 tyče.

d) Změřte 5x dobu padesáti kmitů tyče bez tělesa ($50T$).

e) Změřte 5x dobu padesáti kmitů tyče s tělesem ($50\overline{T}$).

f) Hmotnost přídavného tělíska m_p je uvedena na vývěsce v laboratoři.

g) Měření zaznamenejte do tabulky 12.

Tabulka 12: Tabulka pro záznam měření.

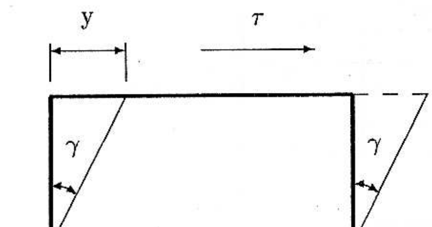
n	L/m	z_1/mm	z_2/mm	n	$50T$/s	$50\overline{T}$/s
1				1		
2				2		
3				3		
..	..	..	..	..	..	..

Zpracování naměřených údajů:

a) Vypočítejte střední hodnoty měřených veličin a jejich pravděpodobné absolutní a relativní chyby.

b) Vypočítejte Youngův modul pružnosti v tahu E podle vztahu (123), jeho absolutní a relativní chybu a získaný modul porovnejte s tabulkovou hodnotou E příslušného materiálu tyče.

7.8 Stanovení modulu pružnosti ve smyku přímou metodou



K definici smyku

Modul pružnosti ve smyku G, jakožto materiálová konstanta, umožňuje napsat v jednoduché podobě vztah mezi smykovým (tečným) napětím τ a smykovou deformací γ (poměrným zkosením)

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \; . \tag{124}$$

Tento vztah představuje přirozenou analogii Hookova zákona pro smyk. Veličiny τ a γ jsou definovány následovně

$$\tau = \frac{F_t}{S} \; , \qquad \gamma = \frac{y}{z} \; , \tag{125}$$

kde F_t je tečná síla způsobující smyk (posuv) materiálové plošky S vzhledem k sousední plošce (viz obrázek smyku). Symboly y a z určují parametry zkosení. Až do meze úměrnosti je vztah (124) lineární, tj. G si zachovává význam již zmíněné materiálové konstanty.

Zvláštním případem namáhání ve smyku je torze tyčí nebo tenkých vláken (drátů), kdy je podélné posunutí vrstviček materiálu nahrazeno vzájemným kruhovým posunutím, takže má smysl zavést úhel zkrutu φ (ve stupních) jako měřítko celkového kruhového stočení. Při torzi je každá část vlákna (tyče) namáhána pouze smykem (nikoliv tahem či tlakem) a přitom, i když smyk v každé části vlákna je poměrně malý, takže leží hluboko pod mezí úměrnosti smykové deformace a tečného napětí, výsledný úhel stočení φ, může být dosti značný (v závislosti na délce a průřezu vlákna, resp. tyče), a tedy dobře měřitelný. Vztah (124), který platí pro smyk obecně, přejde při torzi vláken (tyčí) na obdobný vztah spojující úhel stočení $\overline{\varphi}$ (v radiánech) se zkrutovým silovým momentem M

$$\overline{\varphi} = \frac{M}{kG} , \qquad M = F_g D = mgD . \tag{126}$$

Konstanta k závisí pouze na tvaru průřezu vlákna (tyče). Z hlediska vyhodnocení výsledků je nejvhodnější kruhový průřez vlákna, pro který platí

$$k = \frac{\pi d^4}{32L} , \tag{127}$$

kde d je průměr a L délka vlákna. Sloučením vztahů (126) a (127) získáme pro modul pružnosti ve smyku výraz

$$G = \frac{5760\, mgLD}{\pi^2 d^4 \varphi} , \qquad \varphi = \frac{\overline{\varphi}}{\pi} 180 \quad \text{(převod úhlu na stupně)} , \tag{128}$$

který upravíme na konečný tvar použitím směrnice a vystupující v lineární závislosti mezi úhlem stočení φ a zatěžující silou $F_g = mg$, tj.

$$G = \frac{5760\, LD}{\pi^2 d^4 a} , \qquad a = \frac{\varphi}{mg} = \frac{\varphi}{F_g} \quad \text{(úhel } \varphi \text{ ve stupních)} . \tag{129}$$

Jestliže je počáteční stočení φ_o nenulové, má lineární závislost $\varphi = f(F_g)$ tvar

$$\varphi = aF_g + \varphi_o . \tag{130}$$

Pokud naměřená experimentální data ($x = F_g, y = \varphi$) vykazují lineární závislost, je zaručeno, že měření proběhlo v oblasti malých smykových deformací. Hodnotu směrnice a můžeme získat na základě závislosti (130) obvyklou regresní metodou nejmenších čtverců. Pro výpočet modulu G lze pak použít vztahu (129).

Úkol: Zjistěte modul pružnosti ve smyku ocelového vlákna (drátu) kruhového průřezu.

Pomůcky:

a) Měřící zařízení.

b) Sada závaží.

c) Mikrometr.

n	d/mm	n	m/g	F/N	Zatěž. $\varphi_1/^o$	Odlehč. $\varphi_2/^o$	Průměr $\varphi/^o$
1		1	0	0			
2		2					
3		3					
..	..	..	..	..	..	..	..

Tabulka 13: Tabulka pro záznam měření.

Postup měření:

a) Změřte 20x průměr drátu d mikrometrem s přesností na tisíciny milimetru.

b) Vyberte si jednu ze dvou kruhových stupnic, na níž budete číst hodnoty φ ve stupních. Do tabulky 13 zapište počáteční hodnotu úhlu zkrutu.

c) Ze sady závaží přidávejte současně na obě misky stejné přívažky m a zapisujte hodnoty φ_1. Po vyčerpání všech připravených závaží misky postupně odlehčujte a zapisujte hodnoty φ_2.

d) Poznamenejte si hodnoty L a D z vývěsky v laboratoři.

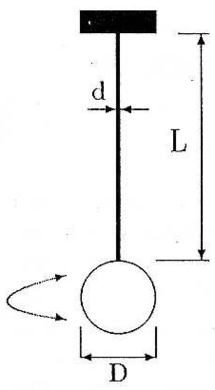
Zpracování naměřených údajů:

a) Sestrojte graf závislosti $\varphi = f(F_g)$ a zjistěte, zda měření probíhala v oblasti malých smykových deformací.

b) Jestliže je závislost $\varphi = f(F_g)$ lineární, tj. ve tvaru (130), pak metodou nejmenších čtverců vypočítejte směrnici a a podle předpisu (129) zjistěte hodnotu modulu pružnosti ve smyku G.

c) Stanovte absolutní a relativní chybu výsledku a získanou hodnotu G porovnejte s fyzikálními tabulkami.

7.9 Stanovení modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou



Torzní kyvadlo

V předešlé úloze byl modul pružnosti ve smyku G měřen statickou metodou. K jeho určení však existují také dynamické metody. Metoda torzních kmitů je jednou z často používaných experimentálních metod k určení modulu pružnosti ve smyku zkoumaného materiálu. Materiál volíme nejlépe v podobě tenké tyče nebo vlákna (drátu) délky L a kruhového průřezu průměru d. Jeden konec vlákna je upevněn a na druhý, volný konec je zavěšeno těleso — obyčejně pravidelného geometrického tvaru — tak, aby osa jeho hlavní symetrie byla totožná s osou vlákna. Pravidelnost geometrického tvaru zavěšeného tělesa nám zaručuje snadný výpočet jeho momentu setrvačnosti J vzhledem k ose symetrie. Pootočíme-li tělesem kolem osy hlavní symetrie (závěsu), začne konat torzní kmity s periodou T a pro hledaný modul pružnosti platí

$$G = \frac{128\,\pi L J}{T^2\,d^4} \; . \qquad (131)$$

Pro moment setrvačnosti J vzhledem k ose hlavní symetrie nejčastěji používaných těles o hmotnostech m a poloměrech R platí

$$J = \frac{2}{5}mR^2 \quad \text{(koule)} \;, \qquad J = \frac{1}{2}mR^2 \quad \text{(válec)} \;, \qquad (132)$$

$$J = \frac{3}{10}mR^2 \quad \text{(kužel)} \;, \qquad J = \frac{3}{10}m\frac{R_1^5 - R_2^5}{R_1^3 - R_2^3} \quad \text{(komolý kužel } R_1 > R_2\text{)} \; . \qquad (133)$$

Úkol: Zjistěte modul pružnosti ve smyku ocelového drátu metodou torzních kmitů.

Tabulka 14: Tabulka pro záznam měření.

n	d/mm	L/m	Počet kmitů (i)	T_i/s	Počet kmitů (i)	T_i/s	Rozdíl $15\,T_i$/s
1			3		18		
2			6		21		
3			9		24		
4			12		27		
5			15		30		
6							
..	..	..					

Pomůcky:

a) Měřící zařízení.

b) Svinovací metr.

c) Mikrometr.

d) Stopky s mezičasem.

Postup měření:

a) Změřte 20x průměr drátu mikrometrem s přesností na tisíciny milimetru.

b) Změřte 10x délku drátu svinovacím metrem s přesností alespoň na polovinu milimetru.

c) Změřte pomocí stopek s mezičasem periodu torzních kmitů postupnou metodou po třech kmitech a časy T_i zapisujte do tabulky.

d) Hmotnost m a rozměry vybraného tělesa naleznete na vývěsce v laboratoři.

Zpracování naměřených údajů:

a) Vypočítejte průměrné hodnoty měřených veličin d, L, T a jejich absolutní a relativní chyby.

b) Vypočítejte modul pružnosti ve smyku G podle (131) včetně absolutní a relativní chyby.

c) Výsledek porovnejte s fyzikálními tabulkami.

7.10 Stanovení místního tíhového zrychlení reverzním kyvadlem

Fyzické kyvadlo kývá se stejnou dobou kmitu T kolem dvou rovnoběžných os ležících v rovině jdoucí těžištěm ve dvou případech: (i) osy jsou symetricky položené vzhledem k těžišti (jinak libovolně vzájemně vzdálené) nebo (ii) osy jsou nesymetricky položené vzhledem k těžišti a vzájemně vzdálené o tzv. redukovanou délku L_r fyzického kyvadla. V tomto druhém případě se z fyzického kyvadla stává reverzní, neboť umožňuje ekvivalentní kývání (se stejnou dobou kmitu) kolem obou nesymetricky položených os — jak s těžištěm v dolní poloze, kdy je závěs na vzdálenější ose od těžiště (první poloha), tak s těžištěm v horní poloze, kdy je závěs na bližší ose k těžišti (druhá, obrácená, tzv. reverzní poloha). Pro experimentální využití je případ reverzního kyvadla zvláště důležitý, neboť umožňuje snadno stanovit dobu kmitu, a to pomocí stejného vzorce jako u matematického kyvadla, ve kterém za délku závěsu dosazujeme redukovanou délku L_r

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_r}{g}} \quad , \tag{134}$$

kde g je gravitační zrychlení.

Fyzická kyvadla, používaná v laboratořích, mohou mít různá provedení. V praktiku budeme používat fyzické kyvadlo v podobě tyče se dvěma rovnoběžnými břity (osami kývání) vzdálenými o pevnou vzdálenost L (viz obrázek). Na jednom konci tyče je upevněna těžká kovová čočka, která je posunovatelná. Posun čočky se děje podél stupnice určující polohu x čočky na tyči.

Princip měření spočívá v nalezení takové polohy čočky x_∞, kdy bude příslušná doba kmitu stejná pro oba břity, tj. pro obě osy kývání $T_1(x_\infty) = T_2(x_\infty) = T_\infty$. Pouze v tomto případě se stane z fyzického kyvadla reverzní s redukovanou délkou L, takže hledané gravitační zrychlení g může být vyjádřeno na základě vztahu (134)

$$g = \frac{4\,\pi^2 L}{T_\infty^2} \quad . \tag{135}$$

Pro určení polohy x_∞ budeme používat postupné grafické interpolace, jejímž základem je graf závislosti doby kmitu fyzického kyvadla na poloze čočky. Pro dvě osy kývání tak dostáváme dva grafy $T_1(x)$ a $T_2(x)$ (viz obrázek), jejichž průsečík nás přiblíží k hledaným hodnotám (x_∞, T_∞).

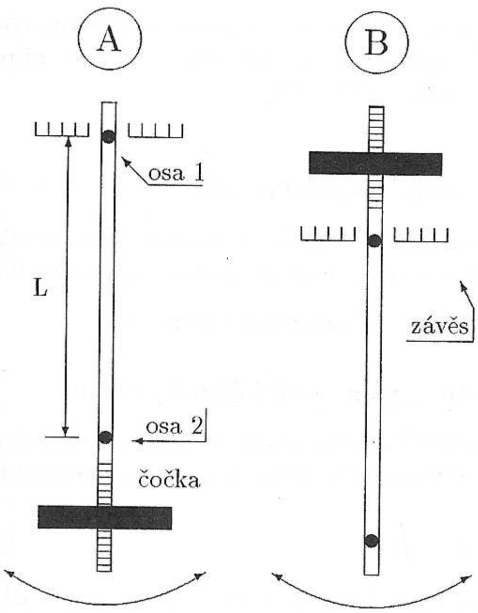
Úkol: Zjistěte hodnotu místního tíhového zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

Pomůcky:

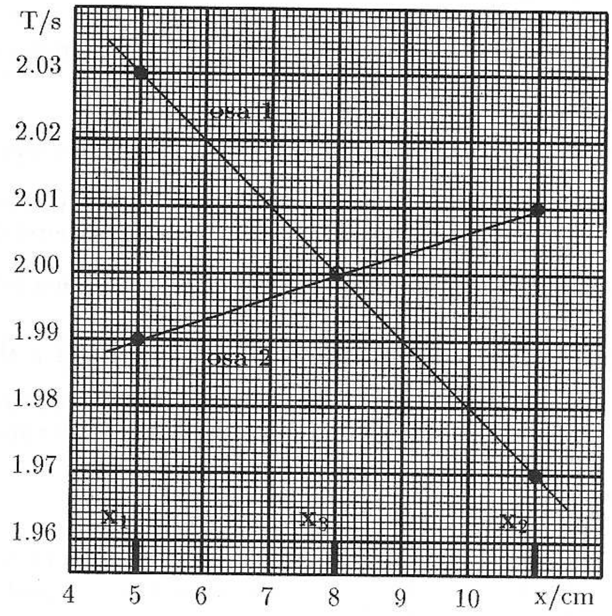
a) Reverzní kyvadlo.

b) Digitální stopky.

Postup měření:



R e v e r z n í   k y v a d l o
A – základní poloha, B – reverzní poloha



Grafická interpolační metoda

První grafická interpolace

a) Poznamenejte si hodnotu L uvedenou na vývěsce v laboratoři.

b) Čočku nastavte přibližně do jedné třetiny stupnice — poloha x_1. Změřte dobu 50 kmitů kolem obou os a zapište do tabulky 15. Rozkmit kyvadla volte menší než 5^o.

c) Čočku nastavte přibližně do dvou třetin stupnice — poloha x_2. Změřte dobu 50 kmitů kolem obou os a časy zapište do tabulky 15.

d) Na milimetrový papír sestrojte grafy $T_1(x)$, $T_2(x)$, nalezněte jejich průsečík x_3, nastavte do něj čočku a změřte dobu 50 kmitů kolem obou os. Získané hodnoty zapište opět do tabulky 15. Liší-li se doby padesáti kmitů v průsečíku x_3 o méně než 0.5 s, můžete ukončit měření. V opačném případě pokračujte následujícím bodem e).

Druhý krok grafické interpolace

e) Posuňte čočku do blízkého okolí polohy x_3, tj. do nové polohy x_4. Také v nové poloze změřte doby padesáti kmitů kolem obou os a zapište si je.

f) Sestrojte nové grafy $T_1(x)$ a $T_2(x)$ z hodnot ve třetí x_3 a čtvrté poloze x_4 čočky. Najděte nový průsečík x_5 a změřte v něm doby padesáti kmitů kolem obou os. Je-li nyní diference mezi těmito

Tabulka 15: Tabulka pro záznam měření.

		První osa		Druhá osa	
n	x/cm	$50\,T_1$/s	T_1/s	$50\,T_2$/s	T_2/s
1					
2					
3					
..	..	..	..	..	..

dobami padesáti kmitů menší než 0.5 s, ukončete měření. V záporném případě pokračujte třetím krokem grafické interpolace. Pečlivě provedená měření a zpracování do grafů však ve většině případů povedou k nalezení uspokojivé polohy čočky již během první interpolace.

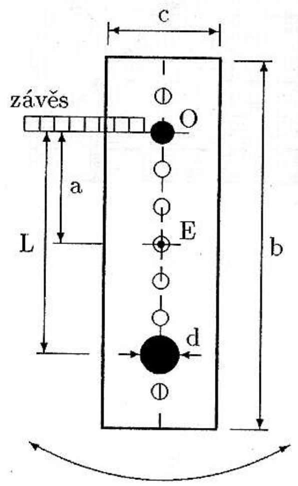
Zpracování naměřených údajů:

a) Pracovní grafy $T_1(x)$ a $T_2(x)$, použité při měření, upravte do čistopisné podoby.

b) Vypočítejte gravitační zrychlení g podle vztahu (135) a za čas T_∞ dosaďte aritmetický průměr ($T_\infty \approx (T_1+T_2)/2$) z dob kmitů v průsečíku, který vyhověl diferenčnímu časovému kritériu ($50\,\Delta T < 0.5$ s).

c) Vypočítejte absolutní a relativní chybu výsledku a porovnejte s fyzikálními tabulkami.

7.11 Stanovení momentu setrvačnosti z doby kyvu fyzického kyvadla



Složené fyzické kyvadlo
O – osa kývání, E – těžiště

Pro homogenní těleso jednoduchého geometrického tvaru je nejrychlejší a často také nejpřesnější vypočítat moment setrvačnosti vůči dané ose přímo z definičního vztahu

$$J = \int_V \varrho r^2 \, dV \quad , \tag{136}$$

ve kterém je ϱ hustota tělesa a r vzdálenost objemového elementu dV od osy otáčení. Integrace probíhá přes celý objem tělesa. Výsledné vztahy pro momenty setrvačnosti mnohých pravidelných homogenních těles získané integrací (136) je možno nalézt v technické literatuře. Určení momentu setrvačnosti se pak redukuje na zvážení tělesa (určení hmotnosti) a změření jeho rozměrů.

Experimentálně lze moment setrvačnosti tělesa stanovit více způsoby. V této laboratorní úloze budeme používat metodu kmitů fyzického kyvadla. Těleso, jehož moment setrvačnosti určujeme, bude ve tvaru tenké desky s délkou b, šířkou c, hmotností M a osou otáčení (kývání) O ležící mimo těžiště E kolmo na plochu bxc (viz obrázek). Vzhledem k pravidelnému tvaru desky známe předem polohu těžiště E. Nalézá se přesně ve středu desky, takže jeho vzdálenost a od osy kývání O můžeme bez problémů změřit. U tělesa obecného tvaru však polohu těžiště předem neznáme a případné náhodné umístění osy kývání O do těžiště E bychom poznali jen podle toho, že takto zavěšené těleso by ztratilo schopnost konat kmity. Nacházelo by se ve volné poloze a jeho doba kmitu by byla nekonečně velká. Doba kmitu fyzického kyvadla s mimotěžištní osou kývání má však konečnou hodnotu, pro kterou platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_o}{Mga}} \quad , \qquad J_o = \frac{g}{4\pi^2} aMT^2 \quad , \tag{137}$$

kde g je gravitační zrychlení a J_o je hledaný moment setrvačnosti vzhledem k použité mimotěžištní ose O. Pro pravidelné těleso, u kterého předem známe polohu těžiště, tj. vzdálenosti a, můžeme vypočítat moment setrvačnosti J_o ze změřené doby kmitu T podle vztahu (137). Pro těleso obecného tvaru je však tento vztah přímo nepoužitelný, neboť neznáme polohu těžiště. Je třeba použít vhodného obratu, který by vyloučil parametr a ze vztahu (137). K tomuto úkolu se používá přídavné tělísko se známým momentem setrvačnosti J_p, např. váleček s hmotností m a průměrem d

$$J_p = \frac{1}{8} md^2 \qquad \text{(vztaženo k vlastní ose válečku)} \quad , \tag{138}$$

který se umístí na zkoumané těleso, v našem případě na kovovou desku, ve vzdálenosti L od osy otáčení O, vzhledem k níž má váleček — podle Steinerovy věty — moment setrvačnosti J_{op}

$$J_{op} = J_p + mL^2 \quad . \tag{139}$$

Připevněním přídavného válečku na kovovou desku vznikne složené fyzické kyvadlo s novou dobou kmitu $\overline{T}$

$$\overline{T} = 2\pi\sqrt{\frac{J_o + J_{op}}{Mga + mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_o + \frac{1}{8}md^2 + mL^2}{Mga + mgL}} \quad . \tag{140}$$

Vyjádřením vzdálenosti a ze vztahu (137) a dosazením do (140) dostáváme

$$J_o = \frac{T^2}{T^2 - \overline{T}^2} m[\frac{gL\overline{T}^2}{4\pi^2} - \frac{d^2}{8} - L^2] \;, \quad \text{(vztaženo k mimotěžišťní ose kyvadla)} \;, \tag{141}$$

ve kterém již nevystupuje parametr a. Ostatní parametry T, $\overline{T}$, m, d, L jsou snadno měřitelné i v případě tělesa obecného tvaru.[1]

Pro srovnání uveďme předpis pro moment setrvačnosti J_o naší desky odvozený užitím definičního vztahu (136) a Steinerovy věty

$$J_o = \frac{1}{12} M(b^2 + c^2) + Ma^2 \;. \tag{142}$$

Hlavní měření této laboratorní úlohy spočívá ve stanovení J_o podle (141), tj. v měření doby kmitu T desky bez přídavného tělíska a doby kmitu $\overline{T}$ s přídavným tělískem a v měření charakteristických parametrů desky, přídavného tělíska a jejich vzájemného rozmístění ve složeném kyvadle. Pro srovnání výsledných hodnot se provede rovněž vyhodnocení J_o pomocí vztahu (137) — tj. změří se i eliminovaný parametr a. Pro úplnost provedeme ještě přímý výpočet J_o podle vzorce (142).

Úkol: Stanovte moment setrvačnosti kovové desky zavěšené v mimotěžišťové ose metodou kmitů složeného fyzického kyvadla. Výsledek porovnejte s hodnotou získanou přímým výpočtem a měřením pomocí jednohoduchého kyvadla.

Pomůcky:

a) Upravená kovová deska s přídavným tělískem.

b) Svinovací metr, posuvné měřítko.

c) Digitální stopky s mezičasem.

Postup měření:

a) Zapište si hmotnost kovové desky M a hmotnost přídavného tělíska m z vývěsky v laboratoři.

b) V předvrtaných otvorech na desce si zvolte bod uchycení přídavného tělíska a změřte vhodným délkovým měřidlem 20x rozměry a, b, c, d, L. Zapisujte do tabulky 16.

c) Změřte postupnou metodou 10x po 5 kmitech dobu kmitu T desky bez přídavného tělíska a hodnoty zapište do tabulky 17.

d) Do vzdálenosti L od osy kývání umístěte na desku přídavné tělísko a změřte dobu kmitu $\overline{T}$ složeného kyvadla. Používejte postupnou metodu s krokem 5 kmitů a hodnoty zapisujte do tabulky podobné tabulce 17.

Tabulka 16: Tabulka pro záznam měření rozměrů.

n	a/mm	b/mm	c/mm	d/mm	L/mm
1					
2					
3					
..	..	..	..	..	

Zpracování naměřených údajů:

[1]Ze vztahu (141) plyne také výraz pro moment setrvačnosti v případě, že složené kyvadlo kývá ($0 < \overline{T} < \infty$) kolem těžišťové osy E původního jednoduchého fyzického kyvadla ($T \to \infty$)

$$J_E = \lim_{T\to\infty} J_o = m[\frac{gL\overline{T}^2}{4\pi^2} - \frac{d^2}{8} - L^2] \;.$$

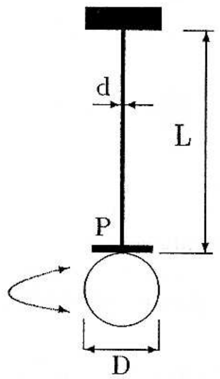
Tabulka 17: Tabulka pro záznam měření postupnou metodou.

Kmity n	T/s	Kmity n	T/s	Rozdíl $25\,T$/s	Kmity n	$\overline{T}$/s	Kmity n	$\overline{T}$/s	Rozdíl $25\,\overline{T}$/s
5		30			5		30		
10		35			10		35		
15		40			15		40		
20		45			20		45		
25		50			25		50		

a) Vypočítejte moment setrvačnosti J_o podle vztahů (141). Proveďte také srovnávací výpočty podle vztahů (142) a (137).

b) Vypočítejte absolutní a relativní chybu výsledné hodnoty J_o (141).

7.12 Stanovení momentu setrvačnosti tělesa pomocí torzních kmitů



Torzní kyvadlo

Torzních kmitů jsme používali již při měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou. Torzní kyvadlo s dobou kmitu T jsme realizovali zavěšením tělesa pravidelného geometrického tvaru se známým momentem setrvačnosti J na vlákno (drát) zhotovené z měřeného materiálu o hledaném modulu ve smyku G, průměru d a délce L. Pootočením tělesa kolem svislé osy závěsu se těleso torzně rozkmitalo. Důležitou podmínkou správnosti měření pomocí torzních kmitů přitom bylo, aby se podélná osa závěsu ztotožnila s osou tělesa, ke které se vztahoval moment setrvačnosti J.

Uvedené uspořádání experimentu zůstane stejné i nyní, avšak s tím rozdílem, že role veličin J a G, jakožto známých a neznámých, se zamění. Úkolem bude nalézt moment setrvačnosti J tělesa vůči dané ose. Těleso již může být obecného tvaru. Materiál drátu, tedy modul G, volíme podle uvážení. V tomto smyslu také upravíme vztah (131)

$$J = \frac{d^4 G T^2}{128\,\pi L} . \tag{143}$$

Při výpočtu J z této rovnice lze nesnadno dosáhnout velké přesnosti. Poněvadž průměr drátu d je třeba volit malý, je relativní chyba jeho měření velká. Vzhledem ke čtvrté mocnině d se projeví tato chyba čtyřnásobně v relativní chybě J. Málokdy víme zcela přesně hodnotu G pro aktuálně použitý materiál drátu. Výhodnější je proto eliminovat parametry d, G, i L ze vztahu (143) tím, že necháme na témže drátu torzně kmitat těleso známého momentu setrvačnosti J_o

$$J_o = \frac{d^4 G T^2}{128\,\pi L} . \tag{144}$$

a podílem vztahů (143), (144) obdržíme výraz pro hledaný moment setrvačnosti bez nežádoucích parametrů

$$J = \frac{T^2}{T_o^2} J_o . \tag{145}$$

Měřením velkého počtu kmitů lze stanovit dobu T i T_o velmi přesně, což je dobrý předpoklad i pro přesné stanovení J.

Eliminaci nežádoucích parametrů můžeme realizovat i tak, že místo úplné výměny torzně kmitajícího tělesa provedeme částečnou výměnu, tj. použijeme přídavného tělíska se známým momentem setrvačnosti J_1 podobně jako v předešlé úloze při měření momentu setrvačnosti pomocí složeného fyzického kyvadla. Přídavné tělísko (viz tělísko P na obrázku) hmotnosti m tvaru válce s průměrem D

$$J_1 = \frac{1}{8} m D^2 \qquad \text{(vzhledem k ose válce)} \tag{146}$$

umístíme na měřené těleso tak, aby osa válce byla totožná s podélnou osou závěsu, čímž dojde ke změně doby torzních kmitů z T na T_1

$$J + J_1 = \frac{d^4 G T_1^2}{128\,\pi L} \,. \tag{147}$$

Snadnou úpravou vztahů (147) a (143) obdržíme

$$J = \frac{T^2}{T_1^2 - T^2} J_1 \tag{148}$$

a po dosazení za J_1 z rovnice (146)

$$J = \frac{mD^2T^2}{8(T_1^2 - T^2)} \,. \tag{149}$$

Při měření momentu setrvačnosti J tímto způsobem — na rozdíl od (145) — vzniká nebezpečí zatížení výsledku J velkou rozdílovou chybou. Proto je třeba dbát na co největší rozdíl dob kmitů $T_1 - T$. Toho lze dosáhnout např. tím, že ze sady přídavných tělísek vybereme váleček s největším průměrem D a hmotností m.

Měření momentu setrvačnosti metodou torzních kmitů s přídavným tělesem tedy spočívá ve stanovení doby kmitů, které vykonává jednak samotné zkoumané těleso (T) a pak spojené s přídavným tělískem (T_1). Předpokládá se znalost momentu setrvačnosti J_1 přídavného tělíska.

Úkol: Zjistěte moment setrvačnosti daného tělesa k dané ose metodou torzních kmitů s přídavným tělesem ve tvaru válečku.

Pomůcky:

a) Závěsné zařízení s vyšetřovaným tělesem.

b) Sada přídavných tělísek (válečků).

c) Digitální stopky s mezičasem.

d) Posuvné měřítko (event. svinovací metr).

Tabulka 18: Tabulka pro záznam měření.

n	D/mm	Kmity n	T/s	Kmity n	T/s	Rozdíl $25\,T$/s	Kmity n	T_1/s	Kmity n	T_1/s	Rozdíl $25\,T_1$/s
1		5		30			5		30		
2		10		35			10		35		
3		15		40			15		40		
..	..	20		45			20		45		
..	..	25		50			25		50		

Postup měření:

a) Poznamenejte si hmotnost m vybraného přídavného kovového válečku (hodnota v gramech vyražena na povrchu válečku — relativní chyba hmotnosti 1 %).

b) Změřte 20x průměr D přídavného válečku a zapište do tabulky 18.

c) Postupnou metodou 10x po 5 kmitech změřte dobu torzních kmitů T zkoumaného tělesa bez přídavného válečku. Měření zapisujte do tabulky 18.

d) Postupnou metodou 10x po 5 kmitech změřte dobu torzních kmitů T_1 zkoumaného tělesa spojeného s přídavným válečkem. Měření zapisujte opět do tabulky 18.

e) Pokud je zkoumané těleso pravidelného geometrického tvaru, zjistěte si jeho rozměry (z vývěsky v laboratoři) a v domácím protokolu proveďte kontrolu naměřeného J přímým výpočtem.

Zpracování naměřených údajů:

a) Vypočtěte moment setrvačnosti J zkoumaného tělesa vzhledem k podélné ose závěsu podle vztahu (149).

b) Stanovte absolutní a relativní chybu výsledku.

c) Pokud bylo zkoumané těleso pravidelného geometrického tvaru, proveďte přímý výpočet jeho momentu setrvačnosti (vzorce pro výpočet J některých běžných těles naleznete v těchto skriptech v návodu k měření modulu pružnosti ve smyku dynamickou metodou) a porovnejte s naměřenou hodnotou J.