

1 ÚVOD

1.1 Experimentální a teoretická fyzika

Fyzika byla původně souhrnnou vědou o přírodě, avšak v průběhu dlouhého vývoje se z ní vydělovaly jednotlivé obory, takže se vyvíjel nejen její obsah, ale i struktura. Proces diferenciací a modifikace fyziky probíhají přirozeně i v současnosti, kdy dochází ke zrychlování informačního toku, přílivu nových poznatků i zintenzívnění badatelské činnosti.

Fyzika zkoumá objektivní realitu vnějšího světa. Vlastnosti této objektivní reality vyjadřuje symbolicky pomocí fyzikálních veličin, které jsou měřitelné. Fyzika se zpočátku vyvíjela hlavně jako *experimentální disciplína*, ve které se indukci na základě pokusů a pozorování dospívá k obecným kvantitativním zákonům, ze kterých je možné zpětně deduktivně předvídat pozorované přírodní jevy. Postupem času se však stupeň abstrakce ve fyzice rozvinul natolik, že mnohé dnešní oblasti *teoretické fyziky* jsou samonosné, od experimentu vzdálené, kdy kontrolní funkci experimentu přebírají mimo jiné i kritéria formální uzavřenosti budované teorie. Cílem takové abstraktní soustavy je vybudování systému obecných principů, ze kterých vyplývají fyzikální zákony. Jde zdánlivě o cestu protisměrnou experimentální fyzice, avšak oba směry — jak experimentální, tak teoretický — mají společného jmenovatele, totiž snahu po nalezení či zdůvodnění objektivně platných fyzikálních zákonitostí.

Náš zájem v těchto skriptech bude upřen k experimentální fyzice, avšak soustředíme se pouze na její nejjednodušší podobu, která představuje prosté měření fyzikálních veličin, event. experimentální ověření již známých zákonitostí.

Tato skripta mají za úkol shrnout nejnútnejší sumu znalostí a dovedností z oblasti přípravy, provedení a vyhodnocení fyzikálního experimentu. Mají posloužit jako stručný úvod do experimentální práce.

Konkrétní zadání jednotlivých laboratorních úloh s konkrétním postupem je obsaženo v druhém dílu skript s názvem „Laboratorní cvičení z fyziky”.

1.2 Fyzikální veličina a její měřitelnost

Fyzikální veličina X zastupuje určitou vlastnost objektivní reality, která je měřitelná. Má kvantitativní a kvalitativní stránku, což vystihuje rovnice

$$X = \{X\} \cdot [X] \quad , \quad (1)$$

kde $\{X\}$ je číslo a $[X]$ jednotka. Jednotka $[X]$ má určitý fyzikální rozměr — dimenzi. Fyzikální rozměr je důsledkem kvalitativní stránky fyzikální veličiny. Porovnat mezi sebou lze pouze fyzikální veličiny stejné kvality, tj. stejné dimenze. Fyzikální veličiny různých dimenzí, tedy i různých jednotek, nemá smysl porovnávat, neboť jsou nesouměřitelné.

Sama jednotka $[X]$ představuje určité — dohodnuté — množství $\{J\}$ vybrané fyzikální veličiny J , která má stejnou dimenzi jako X . Dohodnutému množství je definičně přisouzena „jednotková” velikost $\{J\} = 1$

$$J = 1 \cdot [J] = 1 \cdot [X] \quad . \quad (2)$$

Také ostatní veličiny Y stejné kvality, tj. dimenze, jako J se s ní mohou porovnávat

$$\{Y\} = \frac{Y}{J} \quad (3)$$

a určovat tak svoji velikost $\{Y\}$ (bezrozměrné číslo) vzhledem k této jednotkové fyzikální veličině J . Proces porovnání souměřitelných fyzikálních veličin s jednotkovou veličinou, jehož výsledkem je číslo $\{Y\}$, realizujeme v experimentální fyzice *měřením*, které provádíme pomocí vhodného přístroje či zařízení. Výsledek měření uvádíme ve tvaru (1), tj.

$$Y = \{Y\} \cdot J = \{Y\} \cdot [J] = \{Y\} \cdot [Y] \quad . \quad (4)$$

Tak například zápis síly

$$F = 254 \text{ N} \quad (5)$$

určuje její velikost $\{F\} = 254$ v jednotkách $[F] = \text{N}$ (newton). Jde-li např. o tíhu určitého tělesa, proces měření mohl být realizován mimo jiné pomocí pružinového siloměru (míncíře) ocejchovaného v jednotkách N, tj. $J = 1 \cdot \text{N}$, na jehož stupnici čteme hodnotu $\{F\} = 254$

$$\{F\} = \frac{F}{J} \quad . \quad (6)$$

Použijeme-li jinou jednotkovou veličinu, např. $J = 1 \cdot \text{kN}$ (kilonewton), změní se i oceňovaná stupnice siloměru a při nezměněném tělese na ní můžeme nyní číst velikost (hodnotu) tisíckrát menší $\{F\} = 0.254$, tj.

$$F = 0.254 \text{ kN} \quad (7)$$

Ze zápisů (5) a (7) platících pro tíhu jednoho a téhož tělesa vidíme, že se změnou jednotek $[F]$ souvisí změna velikosti čísla $\{F\}$, avšak celková veličina součinu $F = \{F\} \cdot [F]$ zůstává konstantní. To platí obecně pro jakoukoliv jinou fyzikální veličinu X vyjádřenou ve tvaru (1).

Jako příklad souměřitelných fyzikálních veličin stejné dimenze můžeme uvést různé typy sil: tíhové (gravitační), coulombovské elektrostatické, Van der Waalsovy slabé síly a silné nukleární síly atomového jádra. Dvě souměřitelné fyzikální veličiny se sobě rovnají, pokud je lze vyjádřit ve stejných jednotkách $[X]$ se stejným číselným faktorem $\{X\}$. Proto také jakákoliv fyzikální rovnice, která představuje rovnost dvou fyzikálních výrazů (veličin) musí splňovat nejen podmínku číselné rovnosti, ale také kritérium rozměrové homogenity (výrazy na obou stranách rovnice musí mít stejnou dimenzi, tedy i jednotku).

1.3 Příprava měření

Každému fyzikálnímu měření předchází určitá příprava. Jde zejména o následující kroky:

- Jednu a tutéž fyzikální veličinu můžeme obvykle měřit více způsoby. Každá metoda měření má svoje klady i zápory, a proto je třeba pečlivě zvážit, která z nich v daných podmínkách představuje optimum.
- Experimentátor se musí seznámit s pracovním postupem a musí brát v úvahu současné fyzikální poznatky.
- Příprava měřeného vzorku musí splňovat požadavky fyzikální měřitelnosti, jeho přesnosti a technologické realizovatelnosti.
- Výběr vhodných přístrojů, jejich nastavení a uspořádání.
- Uvážení vnějších rušivých vlivů — teplota, tlak, vlhkost vzduchu, přítomnost fyzikálních polí, záření, mechanické otřesy, chvění, akustické vlnění ap.
- Vhodné umístění přístrojů — co nejvíce od rušivých vlivů nebo provést opatření k eliminaci rušení (stínění, tlumení, kompenzace ap.).
- Rozbor očekávané přesnosti měření.

Nelze dát obecně přesný recept, jak připravit úspěšný experiment. Často se experimentátor dostává k cíli obtížně, zejména pokud jde neprošlapanou cestou. Takové nebezpečí ovšem v laboratorním cvičení nehrozí, neboť jde o spolehlivě prověřené experimenty.

1.4 Rozdělení měřicích metod

Metody měření závisí nejen na typu měřené veličiny, na fyzikálním vztahu, ze kterého veličinu počítáme, ale i na samotném typu a uspořádání přístrojů. Měřicí metody mohou být proto klasifikovány různým způsobem.

- a) **Přímé a nepřímé metody.** Metoda přímá vychází z definičního vztahu pro měřenou veličinu. Nepřímé metody využívají odvozené vztahy. Například metoda měření hustoty $\rho = m/V$ využívající hmotnosti a objemu zkoumané kapaliny je metodou přímou, neboť vychází z definičního vztahu, avšak hustota určená ze vztlakové síly — podle Archimedova zákona — je nepřímou metodou. To ovšem neznamená, že nemůže být sestaven přístroj (hustoměr), který bude využívat nepřímé metody (Archimedova zákona), a přitom bude hustotu měřit *přímo* prostřednictvím své jediné stupnice bez jakýchkoliv dalších pomocných veličin. Abychom od sebe odlišili nepřímé metody realizované „přímým“ a „nepřímým“ způsobem (podobně u přímých metod), doplníme názvosloví o termíny *jednokomponentní* a *vícekomponentní* měření.

- b) **Jednokomponentní a vícekomponentní metody.** Při jednokomponentní metodě čteme výslednou hodnotu přímo ze stupnice jediného přístroje. U vícekomponentní metody čteme z různých přístrojů několik veličin a počítáme z nich výsledek na základě odvozeného fyzikálního vztahu.

Jednokomponentní metody měření bývají často nepřímé, jako je tomu např. při měření hustoměrem. Na druhé straně vícekomponentní metody mohou být přímé — např. určování hustoty z hmotnosti a objemu.

- c) **Absolutní a relativní metody.** Absolutní metody poskytují absolutní hodnotu hledané veličiny vyjádřenou v definovaných jednotkách, např. hmotnost v kilogramech, elektrický proud v ampérech, náboj v coulombech ap.

Relativní metody udávají pouze bezrozměrný poměr dvou veličin stejného druhu a stejných jednotek, např. poměr dvou intenzit $r = I/I_0$.

- d) **Statické a dynamické metody.** Pro měření časově nezávislé konstantní fyzikální veličiny můžeme použít jak statické, tak dynamické metody. Při statické metodě se měřený vzorek či soustava namáhá časově neproměnnou zátěží (určitou silou nebo stejnosměrným napětím ap.), vyčká se rovnovážného stavu, ve kterém se proměří změněné parametry systému. Často se zátěž systému kaskádovitě zvětšuje nebo zmenšuje a stanovuje se funkční závislost parametrů systému na zátěži. Ze získané funkční závislosti se pak počítá hodnota hledané fyzikální veličiny — viz např. měření modulu pružnosti v tahu nebo ve smyku statickou metodou.

Časově nezávislá konstantní veličina však může být měřena také dynamickou metodou. Při dynamické metodě namáháme vzorek nebo soustavu časově proměnnou — nejčastěji periodickou — zátěží (např. periodickou silou, střídavým napětím atd.) a z periodických změn systému usuzujeme na hodnotu měřené veličiny — viz např. měření modulů pružnosti v tahu a ve smyku dynamickou metodou.

Konečně může nastat případ, kdy měřená veličina není časově konstantní. Např. budeme-li měřit náboj na kondenzátoru během jeho nabíjení nebo vybíjení, bude se jeho hodnota měnit. Přitom zdaleka nemusí jít o monotónní průběh měřené veličiny, jako je tomu u náboje kondenzátoru ani o periodickou změnu signálu, jako je tomu u střídavého napětí, ale může jít o zcela náhodný, časově závislý průběh fyzikální veličiny. Při měření okamžitých hodnot takové veličiny je třeba mít k dispozici měřicí zařízení, které snímá téměř okamžité hodnoty (vzorky) v rychlém časovém sledu — rychlost vzorkování je závislá na rychlosti změny měřené veličiny. Pokud se v těchto případech vůbec hovoří o dynamické metodě, pak jde spíše o zdůraznění faktu, že měřená veličina je časově závislá (dynamická), než o označení periodického režimu měření. Často se však stává, že průběh dynamické časově závislé veličiny přechází do tzv. stacionárního (ustáleného) stavu, kdy se časově nemění nebo je velmi málo (kvazistacionární stav), a pak můžeme pohlížet na měřenou veličinu, jakoby šlo o časově nezávislou, konstantní fyzikální veličinu.

- e) **Substituční metoda.** Při této metodě nahrazujeme měřený vzorek normály popřípadě standardy s odstupňovanými hodnotami měřené veličiny. Hledáme takovou hodnotu normálu, kdy indikační přístroj ukáže stejnou nebo přibližně stejnou výchylku jako u měřeného vzorku. Tato hodnota normálu se pak bere za hodnotu měřené veličiny vzorku. Používané normály by měly tvořit sadu vhodně odstupňovanou, aby bylo možné složit v určitém rozmezí libovolnou hodnotu — například v desítkové soustavě v rozmezí $< 1; 10\,000 >$ je možná následující sada hodnot: 1;1;1;2;5;1;10;10;20;50, 100;100;200;500, 1000;1000;2000;5000, ... Typickým příkladem substituční metody je vážení. Substituční metodou se ale může měřit i elektrický odpor (odporové dekády), indukčnost ap.

- f) **Kompenzační metoda.** Je založena na vykompenzování účinku měřené veličiny účinkem pomocné veličiny téhož druhu. Je často používána u elektrických měření (kompenzace napětí opačným napětím), ačkoliv u mechanických měření se vyskytuje rovněž — např. při běžném vážení na mechanických vahách je točivý moment váženého předmětu kompenzován opačným točivým momentem závaží.

Zvláštním případem kompenzační metody je *metoda nulová*, při níž indikační přístroj, porovnávající účinek měřené a kompenzující veličiny ukazuje — v případě vykompenzování — nulu. Příkladem je dokonalé vyvážení mechanických vah.

Ve srovnání se substituční metodou, jejíž charakter je podobný, kompenzační metoda umožňuje dosáhnout větší přesnosti.

- g) **Metoda postupných měření.** Vztahuje se k souboru měření, která na sebe těsně navazují, kdy koncový bod jednoho měření je současně výchozím bodem měření dalšího. Tato metoda je vhodná zejména pro měření periodických dějů (kmity, otáčky), pro měření vzdálenosti bodů tvořících pravidelnou řadu (vzdálenost uzlů stojatého vlnění) nebo při kaskádovitém zatěžování resp. odlehčování s konstantními přírůstky resp. úbytky zátěže (např. modul pružnosti statickou metodou), při určování plochy planimetrem aj.

- h) **Analogové a digitální metody měření.** Tyto metody se od sebe liší způsobem registrace měřených veličin. Při analogových experimentech čteme měřené hodnoty přímo ze stupnic většinou ručkových přístrojů, zatímco digitální experimenty využívají přístrojů, které převádějí analogový signál na digitální ve vícebitovém rozlišení (osmi, dvanácti i více) a hodnoty zobrazují na displeji nebo ukládají do paměti. Je samozřejmě možný i smíšený způsob registrace.

Mezi digitální metody měření patří i *experimenty řízené počítačem*, ve kterých jsou úkoly experimentátora naprogramovány na řídicím počítači. Počítač je spojen s měřicí aparaturou, řídí, kontroluje, měří i vyhodnocuje celý soubor experimentálních dat.

2 ZÁKLADY TEORIE CHYB

2.1 Druhy chyb

Provádíme-li opakovaná měření za stejných laboratorních podmínek, zjišťujeme, že získané hodnoty se od sebe více či méně liší, přitom měřené veličině X potřebujeme přisoudit jedinou tzv. „správnou hodnotu“. Odchylku naměřené hodnoty x od správné hodnoty x_s nazýváme obecně chybou ε

$$\varepsilon = x - x_s \quad (8)$$

Chyba ε daná rozdílem (8) se nazývá *absolutní* a může být kladná i záporná. Absolutní chyba má vždy fyzikální jednotku totožnou s jednotkou měřené veličiny.

Vyjádříme-li chybu ε relativně vůči správné hodnotě x_s , obdržíme tzv. „relativní chybu“ ϱ

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{x_s} = \frac{x - x_s}{x_s} = \frac{x}{x_s} - 1 \quad (9)$$

Po vynásobení stem vyjádříme relativní chybu v procentech

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{x_s} \cdot 100 \% \quad (10)$$

Relativní chyba je zásadně bezrozměrná — udává se bez jednotek. Bezrozměrnost relativních chyb je výhodná vlastnost, neboť umožňuje — narozdíl od absolutních chyb — srovnat co do přesnosti dvě různorodé (dimenzionálně nesouměřitelné) fyzikální veličiny. Relativních chyb se zvlášť s výhodou používá při vícekomponentních měřeních, kdy výslednou hodnotu počítáme z několika různých veličin.

Jedním ze závažných úkolů experimentátora je, aby prováděl měření s co nejmenšími chybami. Při zpracování měření je rovněž třeba dbát co největší přesnosti. Je ovšem jasné, že pouze početním zpracováním nelze dosáhnout vyšší přesnosti, než zaručuje měření.

K experimentálním chybám dochází pro nedokonalost a nepřesnost měřicích přístrojů a zařízení, nedokonalost a nespolehlivost našich smyslů (zejména zraku a sluchu), dále pro nedokonalost a nepřesnost vyhodnocovacího modelu, tj. vztahu, kterého používáme k vyhodnocování a v neposlední řadě i pro přehlížení okolních negativních vlivů působících na měření.

Pro posouzení přesnosti měření je vhodné provést dělení chyb na:

- Chyby jednokomponentních měření (hrubé, soustavné a nahodilé).
- Chyby vícekomponentních měření (zákon šíření chyb).
- Chyby regresního vyrovnání měřených funkčních závislostí (chyby metody nejmenších čtverců).

Nyní si probereme jednotlivé případy chyb a uvedeme základní vztahy pro jejich výpočet.

2.2 Experimentální chyby jednokomponentních měření

Jednokomponentní měření (nepřesně nazývaná „přímá“), představují měření jediné veličiny (komponenty) ze stupnice jediného přístroje (jednostupnicové měření). Měření tohoto typu mohou být zatížena chybami trojího druhu.

- Hrubé chyby.** Vznikají z nedbalosti nebo omylem. Jimi zatížené hodnoty se často výrazně liší od ostatních. V takovém případě je z měření vypouštíme a při dalším zpracování neuvažujeme.
- Soustavné chyby.** Jsou to chyby zjednodušeného fyzikálního modelu (vyhodnocovacího vztahu), který vznikl zanedbáním nebo zjednodušením během jeho odvozování. Jsou to rovněž chyby přístrojů (např. nesprávně ocejchovaná stupnice) nebo stálé smyslové vady experimentátora. Tyto chyby jsou často stěží objevitelné. Prevencí proti nim může být i pokusná záměna modelu, přístroje i experimentátora. Většinou tyto chyby vychylují měřené hodnoty jednosměrně, tj. buď soustavně k větším nebo menším hodnotám — odtud také označení: soustavné chyby. Jejich hodnota není nijak omezena a mohou dosahovat i mnohonásobku měřené veličiny, čímž znehodnotí celé měření.

c) **Náhodné chyby.** Vznikají nepravidelně (nesystematicky) vlivem nekontrolovatelných změn ve způsobu a podmínkách měření — např. čtení ze stupnice z různých úhlů pohledu experimentátora, různý přítlak čelisti posuvného měřítka k měřenému tělesu, náhodný výkyv teploty či tlaku v laboratoři při jinak ustálených hodnotách atd. Výsledkem těchto náhodných nekontrolovatelných vlivů je rozptýl měřených hodnot.

Předpokládáme, že výsledná náhodná chyba ε je v nejnepříznivějším případě dána součtem chyb ε_v jednotlivých vlivů v

$$\varepsilon = \sum_{(v)} \varepsilon_v \quad (11)$$

Předpoklad, který nás přivedl k rovnici (11) je nazýván *hypotézou elementárních chyb*. V důsledku působení náhodných chyb ε může být předmětem fyzikálního měření pouze *náhodná veličina*, u které můžeme navíc určit během opakovaného měření pouze jistý nahodilý výběr z předpokládaného velkého množství možných hodnot (často nekonečně mnoha). Z rovnic (8) a (11) plyne výraz

$$x = x_s + \sum_{(v)} \varepsilon_v \quad (12)$$

V teorii pravděpodobnosti se dokazuje věta — tak zvaný *centrální limitní teorém* —, která v podstatě říká: je-li náhodná veličina X dána součtem velmi velkého počtu vzájemně nezávislých náhodných veličin ε_v , vliv kterých na celkovou sumu $\sum_{(v)} \varepsilon_v$ je zanedbatelně malý, pak statistické rozdělení veličiny X se blíží k tzv. *normálnímu rozdělení*. Normálním rozdělením se budeme zabývat v následujícím odstavci.

2.3 Gaussův normální zákon rozdělení

Gaussovo normální rozdělení náhodné veličiny X jde dáno *hustotou pravděpodobnosti* $p(x)$ ve tvaru

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

kde parametr x_s zvaný *střední hodnota* představuje „správnou“ hodnotu veličiny X a může nabývat všech reálných hodnot $x \in (-\infty; +\infty)$. Kladná veličina $\sigma > 0$ se v teorii pravděpodobnosti a matematické statistice nazývá *směrodatná odchylka*, ale ve fyzice je častěji označována jako *střední kvadratická chyba*. Funkce $p(x)$ má charakteristický symetrický zvonovitý tvar s jedním maximem v hodnotě $x = x_s$. Parametr σ určuje „šířku“ zvonovité funkce: větší σ zaručuje rozevřenější tvar s nižším maximem. Druhá mocnina σ^2 se nazývá *rozptýl* neboli *disperze*.

V teorii pravděpodobnosti existuje celá řada jiných rozdělení (jiného analytického tvaru), avšak Gaussovo normální rozdělení (13) je díky centrálnímu limitnímu teorému v praxi jedno z nejrozšířenějších (řada náhodných veličin má normální rozdělení). V teorii chyb je navíc zcela dominantní a nepostradatelné.

Z hustoty pravděpodobnosti $p(x)$, ať je již jakéhokoliv druhu, můžeme vyjádřit velikost *pravděpodobnosti* $P(x; x+dx)$ *výskytu* hodnot veličiny X v intervalu $< x; x+dx >$

$$P(x; x+dx) = p(x) dx \quad (14)$$

Upozorňujeme nyní na některé důležité vlastnosti normálního rozdělení:

- Definiční obor funkce $p(x)$ je $x \in (-\infty; +\infty)$, přičemž $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = 0$. Pro $x < x_s$ je $p(x)$ rostoucí funkcí, pro $x > x_s$ je klesající.
- Pro $x = x_s$ nabývá $p(x)$ maximum a platí $p(x_s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
- Tvar funkce $p(x)$ je závislý na hodnotě střední kvadratické odchylky σ . Pro větší σ je maximum nižší a šířka zvonovité funkce větší (funkce roste resp. klesá pomaleji).
- Ačkoliv definičním oborem funkce normálního rozdělení $p(x)$ je interval $(-\infty; +\infty)$, leží prakticky všechny nejčastěji se vyskytující hodnoty náhodné veličiny X v intervalu $(x_s - 3\sigma; x_s + 3\sigma)$. Lze ukázat, že platí

$$P(x_s - 3\sigma; x_s + 3\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_s-3\sigma}^{x_s+3\sigma} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{2\sigma^2}} dx = 0,9973 \approx 1 \quad (\approx 100 \%) \quad (15)$$

Těto vlastnosti, nazývané též pravidlem „tří sigma“, se dá využít jako pomocného kritéria pro testování normálního rozdělení: je-li studovaná veličina rozdělena „normálně“, pak naměřené hodnoty vesměs nebudou rozptýleny od střední hodnoty x_s o více než trojnásobek střední kvadratické odchylky (3σ).

Nyní je třeba upřesnit, jakým způsobem vypočítáme z naměřených hodnot střední hodnotu x_s a střední kvadratickou odchylku σ . O tom pojednávají následující odstavce.

2.4 Stanovení střední hodnoty, střední kvadratické odchylky a experimentální chyby měření

Z Gaussova normálního rozdělení plyne význam střední hodnoty x_s a kvadratické odchylky σ . Zbývá odpovědět na otázku, jak získat jejich konkrétní hodnoty z provedeného měření.

Mějme sadu naměřených hodnot $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ fyzikální veličiny X . Lze ukázat, že nejlepším *přiblížením* střední hodnoty x_s je aritmetický průměr \bar{x}

$$x_s \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (16)$$

Tato aproximace je tím lépe splněna, čím větší počet měření n máme k dispozici.

Další snadno ověřitelnou vlastností aritmetického průměru je následující: součet odchylek naměřených hodnot od aritmetického průměru je roven nule. Jinými slovy — součet kladných a záporných odchylek od aritmetického průměru je v absolutní hodnotě stejný. Pokud není tato vlastnost splněna, je třeba zkontrolovat výpočet aritmetického průměru (jeho nezaokrouhlené hodnoty).

Další zajímavá a lehce odvoditelná vlastnost aritmetického průměru, kterou ovšem neupotřebíme v praktických výpočtech, se týká součtu čtverců (druhých mocnin) odchylek od jeho hodnoty. Tento součet je minimální — jinými slovy: aritmetický průměr splňuje podmínku minima funkce $S = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

$$\frac{dS}{d\bar{x}} = \frac{d}{d\bar{x}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (17)$$

Střední kvadratická odchylka σ *jednoho* měření se aproximuje buď tzv. *výběrovou směrodatnou odchylkou* σ_{n-1} nebo *prostou směrodatnou odchylkou* σ_n

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (18)$$

Pro větší počet měření n dávají oba výrazy přibližně stejné výsledky, neboť pro velká n lze zanedbat jedničku ve jmenovateli druhého výrazu, takže $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n-1} = \sigma_n$. Zdůrazňujeme, že směrodatné odchylky σ_n a σ_{n-1} se týkají odchylky jednoho (libovolně kterého) měření x_i z n -tice naměřených hodnot $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Dosaženou přesnost jednoho měření, tj. *střední kvadratickou chybu jednoho měření*, zapisujeme ve tvaru $X_i = x_i \pm \sigma$, přičemž za σ se nejčastěji volí hodnota výběrové směrodatné odchylky σ_{n-1} . Všechny jednotlivé naměřené hodnoty jsou tedy zatíženy chybou stejné velikosti.

V předchozích vztazích (18) byl uveden návod, jak přibližně stanovit přesnost výsledku jednoho měření náhodné veličiny X . Vzhledem k tomu, že výsledek měření n -tice hodnot aproximujeme aritmetickým průměrem \bar{x} , potřebovali bychom znát také příslušnou *chybu aritmetického průměru*. K této chybě bychom se mohli dopracovat — podobně jako u chyby jednoho měření — vícenásobným „měřením“ aritmetických průměrů náhodné veličiny X . To by mohlo být realizováno stanovením N skupin měření po n hodnotách. Z každé skupiny bychom určili aritmetický průměr a dostali bychom tak N hodnot aritmetických průměrů. S touto N -ticí aritmetických průměrů bychom mohli nakládat jako s n -ticí jednotlivých měření: určit průměr (průměr z průměrů) a střední kvadratickou odchylku (jednotlivých průměrů od celkového průměru). Tato výsledná kvadratická odchylka by vyjadřovala společnou chybu jednotlivých aritmetických průměrů a mohli bychom ji proto považovat i za hledanou *chybu průměru* n -tice jednotlivých měření. Takovýto postup by byl však těžkopádný, a proto se běžně ani nepoužívá. Lze však ukázat, že statistické rozdělení takto „měřených“ průměrů $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_N\}$ má opět normální rozdělení

$$p(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-\bar{x}_s)^2}{2\sigma^2}} \quad (19)$$

kde \bar{x} , je průměr náhodné veličiny X a $\bar{\sigma}$ střední kvadratická chyba *průměru* n -tice měření $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Chyba průměru $\bar{\sigma}$ souvisí s chybou jednoho měření σ jednoduchým vztahem

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (20)$$

Dosadíme-li za σ její často používanou aproximaci σ_{n-1} ze vztahu (18), dostáváme

$$\bar{\sigma} \approx \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad P(\bar{x} - \bar{\sigma}; \bar{x} + \bar{\sigma}) = \int_{\bar{x} - \bar{\sigma}}^{\bar{x} + \bar{\sigma}} p(\bar{x}) d\bar{x} = 0.6823 \quad (\approx 68\%), \quad (21)$$

což je vztah vhodný pro výpočet střední kvadratické chyby aritmetického průměru. Touto chybou je dán interval $X = \bar{x} \pm \bar{\sigma}$, který zaručuje šedesátiosmiprocentní pravděpodobnost, že do něho padne „správná“ hodnota veličiny X .

Další chybou používanou v experimentální fyzice je pravděpodobná chyba aritmetického průměru $\bar{\vartheta}$

$$\bar{\vartheta} \approx \frac{2}{3} \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad P(\bar{x} - \bar{\vartheta}; \bar{x} + \bar{\vartheta}) = \int_{\bar{x} - \bar{\vartheta}}^{\bar{x} + \bar{\vartheta}} p(\bar{x}) d\bar{x} = 0.5 \quad (50\%), \quad (22)$$

kteřou můžeme ještě více zjednodušit na tvar využívající pouze kladných odchylek:

$$\bar{\vartheta} \approx \frac{5}{3} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n\sqrt{n-1}} \quad (23)$$

Číselná konstanta $2/3$ použitá ve vzorci (22) je pouze přibližná, její přesnější hodnota je 0.674. Pravděpodobnou chybou aritmetického průměru $\bar{\vartheta}$ je dán interval $X = \bar{x} \pm \bar{\vartheta}$, který zaručuje padesátiprocentní pravděpodobnost, že do něho padne „správná“ hodnota veličiny X .

Další chybou používanou při zpracování experimentálních dat je průměrná chyba aritmetického průměru $\bar{\eta}$

$$\bar{\eta} \approx 0.798 \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 0.798 \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = 0.798 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad P(\bar{x} - \bar{\eta}; \bar{x} + \bar{\eta}) = \int_{\bar{x} - \bar{\eta}}^{\bar{x} + \bar{\eta}} p(\bar{x}) d\bar{x} = 0.5762 \quad (58\%). \quad (24)$$

Touto chybou je dán interval $X = \bar{x} \pm \bar{\eta}$, který zaručuje padesátiosmiprocentní pravděpodobnost, že do něho padne „správná“ hodnota veličiny X .

Poslední používanou chybou při vyhodnocování experimentálních dat je krajní chyba aritmetického průměru $\bar{\xi}$

$$\bar{\xi} \approx 3 \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 3 \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = 3 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad P(\bar{x} - \bar{\xi}; \bar{x} + \bar{\xi}) = \int_{\bar{x} - \bar{\xi}}^{\bar{x} + \bar{\xi}} p(\bar{x}) d\bar{x} = 0.9973 \quad (\approx 99.7\%). \quad (25)$$

Touto chybou je dán nejširší interval $X = \bar{x} \pm \bar{\xi}$, který zaručuje téměř stoprocentní pravděpodobnost, že do něho padne „správná“ hodnota veličiny X .

Výše uvedené chyby jsou absolutní a liší se od sebe pouze velikostí intervalu, který vymezují kolem hodnoty aritmetického průměru. Tyto chyby resp. jimi určené intervaly byly stanoveny z požadavku určité procentuální pravděpodobnosti, s jakou budou obsahovat „správnou“ hodnotu měřené veličiny. Z této podmínky byly také odvozeny. Jistě bychom si mohli stanovit jinou hodnotu procentuální pravděpodobnosti (např. 25 % nebo 75 %) a odvodit další typy chyb, avšak bude jistě mnohem praktičtější přidržet se již zavedených chyb, které byly přijaty a jsou běžně užívány.

Je také třeba mít na paměti, že ke každé z uvedených absolutních chyb přísluší i odpovídající chyba relativní. Relativní chyby mají obecnější použití zejména pokud jde o srovnávání přesnosti naměřených veličin s různou dimenzí, tedy i jednotkou. Je proto vřele doporučováno je používat. V některých případech se i snadněji počítají než chyby absolutní, např. je-li zjišťovaná veličina dána jako speciální algebraická funkce více proměnných při vícekomponentních měřeních. V takových případech je výhodnější stanovit nejprve relativní chybu výsledku a z ní pak absolutní. Při jednokomponentních měřeních však takto postupovat nelze. Není v možnostech jednokomponentních měření stanovit relativní chybu dříve než absolutní, a proto při nich můžeme postupovat jen standardní cestou od chyb absolutních k relativním.

2.5 Výpočet chyb používaných v laboratorním cvičení

Uvádíme stručný přehled pokynů pro výpočet náhodných chyb jednorozměrných měření včetně podrobného postupu ilustrovaného na konkrétním příkladu. Ze všech možných typů chyb budeme zjišťovat pouze absolutní a relativní *pravděpodobnou* chybu na základě n provedených měření $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$.

V laboratorních cvičeních budeme používat výpočetní vztah pro absolutní pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}$ aritmetického průměru v alternativních tvarech:

$$\bar{\vartheta} \approx \frac{2}{3} \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n-1}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (26)$$

nebo zjednodušeně pomocí kladných odchylek:

$$\bar{\vartheta} \approx \frac{5}{3} \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_+ x_i}{n\sqrt{n-1}} \quad (27)$$

Mezivýsledek zapíšeme ve tvaru:

$$X = \bar{x} \pm \bar{\vartheta} \quad (\text{jednotka}) \quad (28)$$

kde absolutní chyba $\bar{\vartheta}$ je zaokrouhlena na jednu platnou cifru (první nenulová zleva) a na stejné místo jako chyba je zaokrouhlen i aritmetický průměr \bar{x} .

Příslušnou relativní chybu získáme ze zaokrouhlené absolutní chyby $\bar{\vartheta}$ a zaokrouhleného aritmetického průměru \bar{x} :

$$\bar{\varrho} = \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{x}} \cdot 100 \% \quad (29)$$

Výsledek zapíšeme včetně relativní chyby:

$$X = \bar{x} \pm \bar{\vartheta} \quad (\text{jednotka}) \quad \dots\dots \quad \bar{\varrho} \% \quad (30)$$

Tvar (26) pravděpodobné chyby aritmetického průměru je výhodný při zpracování chyb na kapesním kalkulátoru, na kterém jsou obvykle statistické výpočty naprogramovány a obsahují samostatná tlačítka pro hodnoty směrodatných odchylek σ_n a σ_{n-1} jednoho měření. Z nich pak lehce spočítáme podle (26) pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}$ aritmetického průměru.

Shrňme stručně postup při výpočtu pravděpodobné chyby aritmetického průměru při jednorozměrných měřeních:

- Z n naměřených hodnot $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ zapsaných do tabulky vypočítáme aritmetický průměr \bar{x} podle vztahu (16).
- Stanovíme odchylky měření $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ od aritmetického průměru. Kladné $\Delta_+ x_i$ odchylky, záporné $\Delta_- x_i$ odchylky a jejich čtverce $(\Delta x_i)^2$ zapisujeme do samostatných sloupců tabulky. Pořídíme si součty těchto odchylek: $\sum_{i=1}^n \Delta_+ x_i$, $\sum_{i=1}^n \Delta_- x_i$ a $\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2$.
- Provádíme-li výpočet chyb pomocí naprogramované statistiky na kapesním kalkulátoru, nemusíme v tabulce uvádět jednotlivé odchylky ani jejich součty, ale uvádíme hodnotu a typ použité směrodatné odchylky (σ_n nebo σ_{n-1}).

- Pomocí vztahů (26) event. (27) vypočítáme absolutní pravděpodobnou chybu a k ní relativní pravděpodobnou chybu podle (29).

Jako příklad uveďme zpracování měření tloušťky d tenké desky mikrometrickým šroubem. Bylo provedeno deset měření $\{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$, kde $n = 10$, s odhadem tisícín milimetru u každé měřené hodnoty d_i . Získaná data jsou uspořádána do tabulky (1). Aplikujeme-li výše popsany postup vyhodnocení, dostáváme

$$\begin{aligned}\bar{d} &= \frac{5,512}{10} = 0,5512 \text{ mm} , \\ \bar{\vartheta} &\approx \frac{2}{3} \sqrt{\frac{0,0097160}{10 \cdot 9}} = 0,00219 \text{ mm} , \\ \bar{\vartheta} &\sim \frac{5}{3} \cdot \frac{0,0388}{10 \cdot 3} = 0,00216 \text{ mm} .\end{aligned}$$

Mezivýsledek uvedeme v zaokrouhleném tvaru

$$d = (0,551 \pm 0,002) \text{ mm} .$$

Nyní provedeme výpočet relativní chyby ze zaokrouhlených hodnot

$$\bar{\varrho} = \frac{0,002}{0,551} \cdot 100 = 0,36 \% .$$

Konečný výsledek ve správném tvaru bude

$$d = (0.551 \pm 0.002) \text{ mm} \quad \dots \quad \bar{\varrho} = 0.36 \% .$$

Tabulka 1: Tabulka pro záznam měření tlouštěk tenké desky.

i	d_i/mm	$\Delta_+ d_i/\text{mm}$	$\Delta_- d_i/\text{mm}$	$(\Delta d_i)^2/\text{mm}^2$
1	0,554	0,0028		0,00000784
2	0,545		-0,0062	0,00003844
3	0,560	0,0088		0,00007744
4	0,531		-0,0202	0,00040804
5	0,557	0,0058		0,00003364
6	0,549		-0,0022	0,00000484
7	0,555	0,0038		0,00001444
8	0,568	0,0168		0,00028224
9	0,552	0,0008		0,00000064
10	0,541		-0,0102	0,00010404
Σ	5,512	0,0388	-0,0388	0,00097160

2.6 Chyby vícekomponentních měření, zákon šíření chyb

Při vícekomponentních měřeních (často nepřesně označovaných nepřímé) získáme hodnoty několika veličin ze stupnic několika různých přístrojů a výsledek počítáme z fyzikálního vztahu, do něhož dosazujeme změřené pomocné veličiny. Každá z těchto pomocných komponent je zatížena určitou chybou. Chyba výsledku bude proto sestávat z chyb jednotlivých komponent. Například při určování hustoty tělesa $\varrho = m/V$ změříme nezávisle jeho objem V a hmotnost m s pravděpodobnými chybami $\bar{\vartheta}(V)$ a $\bar{\vartheta}(m)$. Jde nyní o to, určit chybu výsledku, tj. chybu hustoty $\bar{\vartheta}(\varrho)$ z chyb jednotlivých komponent $\bar{\vartheta}(m)$, $\bar{\vartheta}(V)$. Výsledná chyba při vícekomponentních měřeních je určena tzv. *zákonem šíření chyb*, který vyložíme v následujících odstavcích.

Předpokládejme, že hledaná fyzikální veličina X je dána jako funkce n nezávislých veličin (komponent) $a, b, c \dots$

$$X = f(a, b, c \dots) . \quad (31)$$

Aritmetické průměry \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} , ... a příslušné pravděpodobné chyby $\bar{\vartheta}(a)$, $\bar{\vartheta}(b)$, $\bar{\vartheta}(c)$... všech komponent byly vyčísleny na základě pomocných jednokomponentních měření (viz předešlá kapitola). Aritmetický průměr \bar{x} a pravděpodobnou chybu $\bar{\vartheta}(X)$ hledané veličiny X lze stanovit následovně

$$\bar{X} = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \quad , \quad (32)$$

$$\bar{\vartheta}(X) = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial a} \cdot \bar{\vartheta}(a)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial b} \cdot \bar{\vartheta}(b)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial c} \cdot \bar{\vartheta}(c)\right]^2 + \dots} \quad , \quad (33)$$

kde vystupují parciální derivace funkce f podle jednotlivých proměnných (komponent) a , b , c , Při parciální derivaci se považují proměnné za konstanty s výjimkou té, podle níž se právě derivuje. Vztah (33) udává, jak se podílejí chyby jednotlivých pomocných komponent na chybě výsledku. Ve vztahu (33) je možné použít místo pravděpodobných chyb kterékoliv jiné absolutní chyby (střední, průměrné, krajní). Jde tedy o zcela obecný předpis pro komponentní skládání chyb: jednokomponentní měření přispívají do celkové chyby výsledného vícekomponentního měření podle předpisu (33). Tento obecný způsob skládání chyb se nazývá *zákonem šíření chyb*.

Je-li vyhodnocovací funkce $f(a, b, c, \dots)$ *speciální algebraickou* funkcí, která obsahuje proměnné pouze v součinu, podílu, v mocnině nebo odmocnině (nevyskytují se proměnné v součtu nebo podílu)

$$f(a, b, c, \dots) = \text{konst} \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \dots \quad , \quad (34)$$

pak zákon šíření chyb (33) může být s výhodou přiveden na tvar poskytující relativní chybu výsledku $\bar{\varrho}(X)$ z relativních chyb jednotlivých komponent $\bar{\varrho}(a)$, $\bar{\varrho}(b)$, $\bar{\varrho}(c)$... , aniž bychom museli vyčíslit — mnohdy velmi pracně — parciální derivace

$$\bar{\varrho}(X) = \sqrt{[\alpha \cdot \bar{\varrho}(a)]^2 + [\beta \cdot \bar{\varrho}(b)]^2 + [\gamma \cdot \bar{\varrho}(c)]^2 + \dots} \quad . \quad (35)$$

Z této modifikace zákona šíření chyb je zcela zřejmé, že komponenty, které jsou ve vyšší mocnině resp. odmocnině zatěžují výsledek podstatně větší chybou, než komponenty s menším exponentem. Je proto žádoucí měřit přesněji veličiny zejména s vyšším exponentem (volit větší počet opakovaných měření n) tak, aby byla jejich experimentální chyba menší a zmenšil se tak i jejich velmi nepříznivý vliv na celkovou chybu výsledku.

Je třeba opětovně zdůraznit, že modifikace (35) zákona šíření chyb využívající relativních chyb platí pouze pro speciální algebraické funkce f typu (34). Obsahuje-li funkce f součet nebo rozdíl komponent (nebo transcendentní funkční složku), vztah (35) *neplatí*. V takovém případě máme na vybranou ze dvou možností: (i) vrátit se k původnímu vyjádření (33) a pracovat s parciálními derivacemi nebo (ii) použít substituci a místo součtu nebo rozdílu zavést novou proměnnou, čímž vznikne nová speciální algebraická funkce a obnoví se možnost využít výhodného vztahu (35). Obě možnosti jsou ilustrovány na příkladech v následujících odstavcích.

Při určování modulu pružnosti $G(m, R, d, L, T)$ ve smyku (torzi) ocelového drátu průměru d a délky L dynamickou metodou, tj. pomocí torzních periodických kmitů s periodou T , které koná zavěšené těleso — váleček nebo koule — o poloměru R a hmotnosti m , vyhodnocovací funkce G nabývá potřebného speciálního algebraického tvaru

$$G(m, R, d, L, T) = f(m, R, d, L, T) = \text{konst} \cdot \frac{mR^2L}{T^2d^4} = \text{konst} \cdot mR^2d^{-4}LT^{-2} \quad , \quad (36)$$

takže s výhodou použijeme pro výslednou relativní pravděpodobnou chybu $\bar{\varrho}(G)$ vztahu (35)

$$\bar{\varrho}(G) = \sqrt{[\bar{\varrho}(m)]^2 + [2 \cdot \bar{\varrho}(R)]^2 + [-4 \cdot \bar{\varrho}(d)]^2 + [\bar{\varrho}(L)]^2 + [-2 \cdot \bar{\varrho}(T)]^2} \quad (37)$$

a stanovíme i absolutní pravděpodobnou chybu aritmetického průměru \bar{G}

$$\bar{\vartheta}(G) = \bar{G} \cdot \frac{\bar{\varrho}(G)}{100} \quad . \quad (38)$$

Pro konkrétní měření s relativními pravděpodobnými chybami komponent

$$\begin{aligned}
L &= (73,4 \pm 0,1) \text{ cm} \dots\dots \bar{\varrho}(L) = 0,14 \% \\
m &= (1,203 \pm 0,002) \text{ kg} \dots\dots \bar{\varrho}(m) = 0,17 \% \\
R &= (12,57 \pm 0,02) \text{ cm} \dots\dots \bar{\varrho}(R) = 0,16 \% \\
T &= (5,833 \pm 0,005) \text{ s} \dots\dots \bar{\varrho}(T) = 0,09 \% \\
d &= (1,01 \pm 0,004) \text{ mm} \dots\dots \bar{\varrho}(d) = 0,40 \% \\
\text{válec: } konst &= \frac{256}{5}\pi \\
\bar{G} &= 7,923 \cdot 10^{10} \text{ Pa}
\end{aligned}$$

obdržíme následující relativní pravděpodobnou chybu výsledku

$$\bar{\varrho}(G) = \sqrt{(0,17)^2 + (2,0,16)^2 + (-4,0,4)^2 + (0,14)^2 + (-2,0,09)^2} = 2,88 \% , \quad (39)$$

absolutní pravděpodobnou chybu výsledku

$$\bar{\vartheta}(G) = 7,923 \cdot 10^{10} \cdot \frac{2,88}{100} = 0,228 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \quad (40)$$

a výsledek v povinně zaokrouhleném tvaru

$$\boxed{\bar{G} = (7,9 \pm 0,2) \cdot 10^{10} \text{ Pa} \dots\dots \bar{\varrho}(G) = 2,5 \% .} \quad (41)$$

Zvolíme-li cestu přes parciální derivace

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial L} &= konst \cdot \frac{mR^2}{T^2 d^4} = \frac{G}{L} , \\
\frac{\partial G}{\partial m} &= konst \cdot \frac{R^2 L}{T^2 d^4} = \frac{G}{m} , \\
\frac{\partial G}{\partial R} &= konst \cdot \frac{2RmL}{T^2 d^4} = 2 \cdot \frac{G}{R} , \\
\frac{\partial G}{\partial T} &= konst \cdot \frac{mR^2 L}{d^4} \left(-\frac{2}{T^3}\right) = -2 \frac{G}{T} , \\
\frac{\partial G}{\partial d} &= konst \cdot \frac{mR^2 L}{T^2} \left(-\frac{4}{d^5}\right) = -4 \frac{G}{d}
\end{aligned}$$

a dosadíme-li je do původního vztahu (33)

$$\bar{\vartheta}(G) = G \cdot \sqrt{\left[\frac{\bar{\vartheta}(m)}{m}\right]^2 + \left[2 \frac{\bar{\vartheta}(R)}{R}\right]^2 + \left[-4 \frac{\bar{\vartheta}(d)}{d}\right]^2 + \left[\frac{\bar{\vartheta}(L)}{L}\right]^2 + \left[-2 \frac{\bar{\vartheta}(T)}{T}\right]^2} \quad (42)$$

obdržíme vyjádření pro relativní chybu ve stejném tvaru, jako dává vztah (35) resp. (37)

$$\bar{\varrho}(G) = \frac{\bar{\vartheta}(G)}{G} \cdot 100 = \sqrt{[\bar{\varrho}(m)]^2 + [2 \cdot \bar{\varrho}(R)]^2 + [-4 \cdot \bar{\varrho}(d)]^2 + [\bar{\varrho}(L)]^2 + [-2 \cdot \bar{\varrho}(T)]^2} . \quad (43)$$

To ovšem bylo možné očekávat, neboť vyhodnocovací funkce G je ve speciálním algebraickém tvaru.

Ukažme nyní postup, jak zavést do vyhodnocovací funkce substituci za součet resp. rozdíl tak, abychom z ní vytvořili opět speciální algebraickou funkci. Vezměme modul pružnosti E v tahu měřený dynamicky z příčných harmonických kmitů tyče

$$E = f(m_p, L, z_1, z_2, T, T_1) = konst \cdot \frac{L^3 m_p}{z_1 z_2^3 (T_1^2 - T^2)} , \quad (44)$$

což není funkce ve speciálním algebraickém tvaru. Zavedeme-li substituci $y = T_1^2 - T^2$, funkce f bude přivedena ke speciálnímu tvaru

$$E = konst \cdot m_p L^3 z_1^{-1} z_2^{-3} y^{-1} , \quad (45)$$

takže můžeme relativní chybu počítat podle (35)

$$\bar{\varrho}(E) = \sqrt{[\bar{\varrho}(m_p)]^2 + [3\bar{\varrho}(L)]^2 + [\bar{\varrho}(z_1)]^2 + [3\bar{\varrho}(z_2)]^2 + [\bar{\varrho}(y)]^2} \quad (46)$$

a relativní chybu $\bar{\varrho}(y)$ určíme z absolutní chyby $\bar{\vartheta}(y)$

$$\bar{\varrho}(y) = \frac{\bar{\vartheta}(y)}{y} \cdot 100 = \frac{\sqrt{[2T_1 \cdot \bar{\vartheta}(T_1)]^2 + [2T \cdot \bar{\vartheta}(T)]^2}}{T_1^2 - T^2} \cdot 100 \% . \quad (47)$$

2.7 Lineární regrese metodou nejmenších čtverců

Předpokládejme, že jsme měřili funkční závislost veličiny Y na veličině X . Veličinu X jsme měnili v určitém intervalu a k těmto hodnotám jsme četli z měřicího přístroje hodnoty veličiny Y . Výsledkem takového měření je n -tice dvojic čísel $(x_i; y_i)$, které můžeme vynést do grafu. Předpokládejme, že po vynesení experimentálních bodů $(x_i; y_i)$ do grafu a po vizuálním posouzení jejich průběhu dojdeme k závěru, že bychom mohli předpokládat lineární funkční průběh jejich závislosti $y = f(x)$

$$y = ax + b \quad (48)$$

V určitých případech dokonce víme předem, že studovaná závislost musí být lineární, neboť to vyplývá z fyzikální podstaty měřeného jevu (např. při cejchování všech lineárních stupnic přístrojů). Předpokládejme tedy, že „správný“ průběh studované závislosti je *lineární*, takže všechny experimentální body $(x_i; y_i)$ rovnice (48) by měly ležet přesně na přímce (48). Tak by tomu bylo ovšem pouze v případě, že měřené hodnoty $\{y_i\}$ nejsou zatíženy experimentální chybou, což v praxi nebývá splněno. Každá hodnota y_i obsahuje jistou chybu ε_i

$$y_i = y_{oi} + \varepsilon_i \quad (49)$$

O chybách ε_i budeme předpokládat, že jsou složeny z celé řady náhodných vlivů v

$$\varepsilon_i = \sum_{(v)} \varepsilon_{iv} \quad (50)$$

a že, podobně jako chyby jednokomponentních měření, mají v důsledku platnosti centrálního limitního teorému Gaussovo normální rozdělení. V důsledku toho je veličina Y náhodnou veličinou. Symbol y_{oi} reprezentuje „správnou“ hodnotu, která přísluší k nastavené hodnotě x_i , takže dvojice souřadnic $(x_i; y_{oi})$ by přesně splňovala rovnici (48).

V důsledku náhodných chyb ε_i jsou experimentální body $(x_i; y_i)$ kolem ideální přímky (48) náhodně rozptýleny a zcela se k ní nepřimknou. Čím větší bude rozptyl experimentálních bodů $(x_i; y_i)$ kolem ideální přímky (48), tím větší budou hodnoty chyb ε_i . Potíž je ovšem v tom, že zatím neznáme příslušné parametry a , b ideální přímky (48), tj. směrnici a a ypsilonový úsek b . K jejich přibližnému určení použijeme metody nejmenších čtverců založené na podmínce minima součtu S_o čtverců ypsilonových odchylek $(y_i - y_{oi})^2$ experimentálních bodů od ideální přímky (48)

$$S_o = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{oi})^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (51)$$

Tuto sumu můžeme upravit pomocí rovnice (48)

$$S_o = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad , \quad y_{oi} = ax_i + b \quad (52)$$

a pohlížet na ni jako na funkci dvou proměnných $S_o(a, b)$. Minimum funkce více proměnných musí splňovat obecnou podmínku pro extrém

$$\frac{\partial S_o(a, b)}{\partial a} = 0 \quad , \quad \frac{\partial S_o(a, b)}{\partial b} = 0 \quad (53)$$

odkud lze dostat soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a , b . Vyřešením soustavy dostaneme

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (\text{směrnice}) \quad (54)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (55)$$

Tím je nalezena optimalizovaná přímka, která se nejvíce blíží k ideální přímce (48). Jestliže nyní vynese experimentální body (x_i, y_i) a optimální přímku (48) (tj. s parametry vypočítanými podle (54) a (55)) do jednoho grafu, ihned uvidíme, jak moc se experimentální body od přímky odchylují, tzn. jakými přibližnými chybami jsou zatíženy. Matematická statistika nám umožňuje nahlédnout nejen do chyb jednotlivých měření $\varepsilon_i = y_i - y_{oi}$, které se reprezentují jedinou společnou hodnotou — střední kvadratickou

odchylkou jednoho měření, ale také získat pravděpodobné chyby parametrů a, b , což je obdoba pravděpodobné chyby aritmetického průměru jednodimenzionálního měření. Pro pravděpodobné chyby parametrů a, b platí

$$\bar{\vartheta}(a) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i)^2]}} \quad (\text{pravděpodobná chyba směrnice}) \quad (56)$$

$$\bar{\vartheta}(b) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{[\sum_{i=1}^n x_i^2][\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2]}{(n-2)[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2]}} \quad (57)$$

V rámci regresní optimalizace se často používá jako kritérium zkorelovanosti veličin Y a X tzv. korelační koeficient r , jehož hodnota leží v intervalu $r \in [-1; 1]$. Je zaveden následovně

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2][n \sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2]}} \quad (58)$$

Jeho velikost udává „míru správnosti“ vybrané regresní funkce, v našem případě lineární funkce (48). Je-li $|r| = 1$, vybraná regresní funkce plně odpovídá experimentálně zjištěnému průběhu bodů $(x_i; y_i)$. Je-li $r = 0$, vybraná regresní funkce je zcela nevhodná. Hodnoty $0 < |r| < 1$ vyjadřují míru lineární zkorelovanosti, tj. míru vhodnosti lineární regresní funkce pro zjištěnou experimentální závislost. Vybereme-li nelineární regresní funkci, kterou lze linearizovat přechodem do jiných souřadnic $(x_i; y_i)$, tj. použijeme transformace $x_i = \varphi(x_i)$, $y_i = \psi(y_i)$, regresní koeficient v nových souřadnicích změní hodnotu, která bude opět vyjadřovat míru správnosti výběru této nové regresní funkce. Můžeme tedy shrnout: ze zkorelovanosti ($|r| = 1$) dvou veličin X, Y vyplývá jejich funkční závislost, avšak z jejich nezkorelovanosti ($r = 0$) nelze usuzovat na funkční nezávislost (nemusí, ale mohou být funkčně závislé).

Uvedme ještě jeden vztah pro pravděpodobnou chybu směrnice, který je velmi vhodný pro výpočty na kapesním kalkulátoru. Většina kalkulátorů má vedle zabudované chybové statistiky také naprogramované „regresní výpočty metodou nejmenších čtverců“, kdy po zadání n -tice změřených dvojic (x_i, y_i) obdržíme zmáčknutím příslušných tlačítek přímo hodnoty parametrů a, b, r nikoliv však chyby těchto parametrů, tj. ani $\bar{\vartheta}(a)$, ani $\bar{\vartheta}(b)$. Relativní pravděpodobnou chybu směrnice však můžeme snadno získat z korelačního koeficientu r , aniž bychom museli podstupovat zdlouhavé výpočty typu (56), (57). Relativní pravděpodobná chyba směrnice souvisí s korelačním koeficientem následovně

$$\bar{\varrho}(a) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r^{-2} - 1}{n - 2}} \cdot 100 \% \quad (\text{relativní pravděpodobná chyba směrnice}) \quad (59)$$

Stačí tedy použít metodu nejmenších čtverců na kapesním kalkulátoru, získat tak parametry a, b, r a z korelačního koeficientu r ihned vypočítat relativní pravděpodobnou chybu směrnice $\bar{\varrho}(a)$. Absolutní pravděpodobná chyba $\bar{\vartheta}(a)$ je pak dána součinem $\bar{\vartheta}(a) = a \cdot \bar{\varrho}(a)/100$.

Závěrem uvedme konkrétní příklad regresního výpočtu metodou nejmenších čtverců. Půjde o měření modulu pružnosti v tahu statickou metodou. Ocelový drát určité délky zatěžujeme závažími o hmotnostech $x_i = m_i$ a zjišťujeme změny jeho délky $y_i = l_i$. Studujeme tedy lineární funkční závislost $l = f(m)$

$$l = a \cdot m + b \quad (\text{Hookův zákon}) \quad (60)$$

K výpočtům parametrů a, b podle vztahů (56), (57) potřebujeme sumy $\sum_{i=1}^n m_i$, $\sum_{i=1}^n l_i$, $\sum_{i=1}^n m_i^2$, $\sum_{i=1}^n m_i l_i$; pokud ovšem nepoužíváme kapesní kalkulátor s naprogramovanými regresními výpočty. V tomto našem případě byl výpočet r a $\bar{\varrho}(a)$ proveden na naprogramovaném kalkulátoru. Naměřených deset dvojic ($n=10$) zatížení m_i a změn délky l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) je uvedeno v tabulce 2. Z těchto experimentálních dat vyplývá

$$a = \frac{10 \cdot 22,3345 - 27,5 \cdot 6,403}{10 \cdot 96,25 - (27,5)^2} = 0,2291 \text{ mm/kg} \quad ,$$

Tabulka 2: Změna délky drátu v závislosti na zatížení.

i	m/kg	l/mm	m ² /(kg) ²	m · l/kg · mm
1	0,5	0,128	0,25	0,0640
2	1,0	0,241	1,00	0,2410
3	1,5	0,350	2,25	0,5250
4	2,0	0,468	4,00	0,9360
5	2,5	0,584	6,25	1,4600
6	3,0	0,692	9,00	2,0760
7	3,5	0,812	12,25	2,8420
8	4,0	0,927	16,00	3,7080
9	4,5	1,045	20,25	4,7025
10	5,0	1,156	25,00	5,7800
Σ	27,5	6,403	96,25	22,3345

$$b = \frac{96,25 \cdot 6,403 - 27,5 \cdot 22,3345}{10 \cdot 96,25 - (27,5)^2} = 0,0101 \text{ mm} ,$$

$$\text{korelační koeficient: } r = 0,9999 = 99,99 \% ,$$

$$\bar{\varrho}(a) = 0,333 \% \implies \bar{\vartheta}(a) = 0,00076 \text{ mm/kg} .$$

Výsledná směrnice v zaokrouhleném tvaru: $a = (0,2291 \pm 0,0008) \text{ mm/kg} \dots \bar{\varrho}(a) = 0,35 \%$

2.8 Nelineární regresní funkce

Předpokládáme-li regresní funkci, jejíž rovnice není lineární v neznámých parametrech, vznikají potíže při řešení příslušné soustavy regresních rovnic, které nejsou obecně lineární. V takových případech se snažíme spíše nelineární regresní funkci linearizovat přechodem do jiných souřadnic. To lze provést ovšem jen u některých typů nelineárních funkcí. Jako příklad nám mohou posloužit tři typy funkcí

$$y = \frac{1}{a + bF_1(x)} , \quad (61)$$

$$y = cF_2^d(x) , \quad (62)$$

$$y = he^{pF_3(x)} , \quad (63)$$

v nichž a, b, c, d, h, p jsou neznámé parametry a funkce $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ jsou libovolné funkce neobsahující žádné neznámé parametry. Například pro $F_1(x) = 1/x^2, F_2(x) = F_3(x) = x$ přejdou obecné funkce (61)–(63) na speciální tvar často užívaných funkcí

$$y = \frac{x^2}{ax^2 + b} , \quad (64)$$

$$y = cx^d , \quad (65)$$

$$y = he^{px} . \quad (66)$$

Použijeme-li u funkcí (61)–(63) vhodných transformací souřadnic $x' = \varphi(x), y' = \psi(y)$, dostaneme lineární regresní funkce

$$y' = a + bx' , \quad \text{transformace: } x' = F_1(x) , \quad y' = \frac{1}{y} , \quad \text{bez změny parametrů} , \quad (67)$$

$$y' = \alpha + dx' , \quad \text{transformace: } x' = \ln F_2(x) , \quad y' = \ln y , \quad \text{parametr: } \alpha = \ln c , \quad (68)$$

$$y' = \beta + px' , \quad \text{transformace: } x' = F_3(x) , \quad y' = \ln y , \quad \text{parametr: } \beta = \ln h . \quad (69)$$

Nyní můžeme snadno provést lineární regresi v nových souřadnicích $(x'; y')$ metodou nejmenších čtverců. Také graf funkcí (61)–(63) v nových, čárkovaných souřadnicích, bude přímkou. O vhodnosti výběru dané regresní funkce nás opět poučí hodnota korelačního koeficientu r vyčíslená v těchto nových souřadnicích.

Všimněme si nyní ještě poslední z diskutovaných regresních funkcí ve speciálním exponenciálním tvaru (66). Tuto funkci budeme často používat při numerickém vyrovnání naměřených dat v laboratorním cvičení. Připomínáme, že její linearizaci provedeme snadno přechodem do semilogaritmických souřadnic $(x' = x; y' = \ln y)$. Pro vynášení grafů v semilogaritmických souřadnicích existují speciální milimetrové papíry, které mají ypsilonovou osu logaritmickou. Pro naše účely však postačí použít obyčejný milimetrový papír a na ypsilonovou osu vynášet zlogaritmované hodnoty v lineárním měřítku. Výsledkem bude graf, který se bude blížit přímce.

Závěrem poznamenejme, že u regresních funkcí, které nelze linearizovat přechodem do nových souřadnic, jsou rovněž vypracovány příslušné metody optimalizace — např. metoda nejmenších čtverců pro polynomickou regresní funkci nebo iterativní optimalizace obecné funkce pomocí omezeného Taylorova rozvoje kombinovaného s metodou nejmenších čtverců ap.

3 ZPRACOVÁNÍ EXPERIMENTÁLNÍCH DAT

Zpracování naměřených experimentálních dat záleží na účelu a způsobu měření. Je-li účelem zjištění funkční závislosti dvou veličin a měříme-li digitální metodou s automatickou registrací, bude příslušné zpracování dat poněkud jiné, než při měření vybrané fyzikální konstanty jednodílnou metodou. V následujících odstavcích se stručně zmíníme o několika zpracovatelských postupech vhodných pro laboratorní cvičení. Tyto postupy budou v zásadě dvojího druhu: numerické a grafické.

3.1 Numerické zpracování

3.1.1 Postupná metoda

Používá se s výhodou všude tam, kde měříme řadu rovnoměrně rostoucích nebo klesajících hodnot např. při rovnoměrném zatěžování nebo odlehčování vzorku nebo u všech periodických dějů registrovaných v nepřetržitě sledu (kývání, kmitání, otáčení) ap. Výsledkem měření postupnou metodou je tedy řada hodnot vzájemně vzdálených o konstantní krok, který je ve skutečnosti jen přibližně konstantní, neboť je zatížen experimentální chybou.

Zpracování této více či méně rovnoměrné série dat spočívá v jejím rozdělení na dvě poloviny, které se obvykle umístí do dvou sloupců tabulky. Odečítáme-li od sebe hodnoty z obou sloupců, které leží na stejných řádcích, dostáváme přibližně konstantní rozdíly, které představují určitou — vždy stejnou — vzdálenost mezi hodnotami naměřené série. Rozdíly umísťujeme do dalšího sloupce tabulky a počítáme z nich aritmetický průměr, odchylky od aritmetického průměru a chybu měření. Nakonec příslušným podělením průměru a chyby vypočítáme přírůstek připadající na jednotný krok řady.

Výhodou postupné metody je úspora času, možnost rychlého zpracování velkého statistického souboru dat a tím i potlačení vlivu náhodných chyb. Určitou nevýhodou je náročnost na lbitost experimentátora, který musí stihnout zapisovat následující běžící hodnoty zejména pokud jde o rychlé dynamické děje (periodické pohyby). Doporučuje se kooperace dvou experimentů nebo zapisování po dostatečném počtu period, např. po 3, 5, 10 i více periodách — podle rychlosti děje. U statických měření tyto problémy odpadají.

Uvedme si nyní dva typické příklady dat naměřených a zpracovaných postupnou metodou. Prvním z nich je případ dynamického měření doby kmitu kyvadla — viz tabulka 3. Čas byl zaznamenáván po každém desátém kmitu bez zastavení stopek a kyvadla. Bylo naměřeno devadesát kmitů a vzniklo deset údajů (počítá se i počáteční nulový stav), které byly rozděleny na poloviny po pěti údajích a umístěny do prvních sloupců tabulky. Rozdílem hodnot, které leží na stejných řádcích obou sloupců dostáváme časy 50-ti kmitů, které jsou umístěny do dalšího sloupce tabulky. Pak je počítán aritmetický průměr, odchylky od aritmetického průměru a pravděpodobná chyba 50-ti kmitů. Vydělením padesáti dostáváme aritmetický průměr a chybu na jeden kmit.

Tabulka 3: Měření doby kmitu kyvadla.

i/kmit	T_i/s	i/kmit	T_i/s	$50\ T/\text{s}$	$\Delta_+ 50\ T/\text{s}$	$\Delta_- 50\ T/\text{s}$	$(\Delta 50\ T)^2/\text{s}^2$
0	0,0	50	49,0	49,0		0,86	0,7396
10	9,0	60	59,1	50,1	0,24		0,0576
20	19,1	70	69,3	50,2	0,34		0,1156
30	29,3	80	79,1	49,8		0,06	0,0036
40	39,1	90	89,3	50,2	0,34		0,1156
$\Sigma =$				249,3	0,92	0,92	1,0320
				$50T = 49,86\ \text{s}$		$\vartheta(50T) = 0,15\ \text{s}$	
				$T = 0,9972\ \text{s}$		$\vartheta(T) = 0,003\ \text{s}$	
				Výsledek: $T = (0,997 \pm 0,003)\ \text{s} \dots \bar{\varrho}(T) = 0,3\ \%$			

Druhý případ se týká statické metody měření modulu pružnosti v tahu, které jsme v minulé kapitole zpracovávali metodou nejmenších čtverců. Nyní si provedeme zpracování stejných dat postupnou metodou, což nám poskytne možnost srovnání. Stručně připomeňme, že jde o vícekomponentní měření, kde jednou ze zjišťovaných komponent je prodloužení Δl ocelového drátu vztažené k příslušnému přívažku

Δm , tj. veličina $a = \Delta l / \Delta m$, což je směrnice závislosti délky drátu (nebo změny délky) l na zatížení m , tj. $l = f(m)$

$$l = am + b \quad (\text{Hookův zákon}) \quad (70)$$

Postupná metoda zpracování je použitelná pouze v případě, že jsme volili konstantní přírůstky zátěže, což v našem případě splněno je ($\Delta m = 0,5 \text{ kg}$). Naměřené hodnoty i způsob zpracování postupnou metodou ilustruje tabulka 4. Z tabulky vidíme, že je splněna nutná podmínka použitelnosti postupné metody: hodnoty v měřené sérii dat musí být vzájemně vzdáleny o víceméně konstantní přírůstek. Rozdílem hodnot na stejných řádcích druhého a čtvrtého sloupce tabulky obdržíme konstantní hodnoty prodloužení ΔL vztažené ke konstantní zátěži $\Delta M = 2,5 \text{ kg}$. Vypočítáme aritmetický průměr $\overline{\Delta L}$, pravděpodobnou chybu tohoto prodloužení $\vartheta(\Delta L)$ a nakonec vše podělíme hodnotou ΔM , o které předpokládáme, že není zatížena chybou, tj. získáme směrnici a s chybou $a = \overline{\Delta L} / \Delta M \pm \vartheta(\Delta L) / \Delta M$.

Tabulka 4: Měření modulu pružnosti v tahu.

m/kg	l/mm	m/kg	l/mm	$\frac{\Delta L}{\text{mm}}$ $\Delta M = 2,5 \text{ kg}$	$\Delta_+(\Delta L)/\text{mm}$	$\Delta_-(\Delta L)/\text{mm}$	$[\Delta(\Delta L)]^2/(\mu\text{m})^2$
0,5	0,128	3,0	0,696	0,568		0,005	25
1,0	0,241	3,5	0,812	0,571		0,002	4
1,5	0,350	4,0	0,927	0,577	0,004		16
2,0	0,468	4,5	1,045	0,577	0,004		16
2,5	0,584	5,0	1,156	0,572		0,001	1
$\Sigma =$				2,865	0,008	0,008	62
				$\Delta L = 0,573 \text{ mm}$	$\vartheta(\Delta L) = 0,00176 \text{ mm}$		
				$\Delta L/\Delta m = 0,2292 \text{ mm/kg}$	$\vartheta(\Delta L)/\Delta M = 0,000704 \text{ mm/kg}$		
				Výsledek: $a = (0,2292 \pm 0,0007) \text{ mm/kg} \dots \bar{a}(a) = 0,31 \%$			

3.1.2 Lineární interpolace

Výsledkem měření funkčních závislostí $y = f(x)$ je obvykle série diskrétních hodnot $(x_i; y_i)$, jejichž počet může být sice značně veliký, avšak je vždy konečný. Problém vznikne v okamžiku, kdy potřebujeme znát hodnotu y pro nezávisle proměnnou x , která není obsažena v souboru měření $(x_i; y_i)$ nebo když taková hodnota x nejde přesně na měřicím zařízení nastavit. V takovém případě hledaný bod $(x; y)$ můžeme přibližně nalézt z nejbližších sousedních bodů $(x_i; y_i)$ a $(x_{i+1}; y_{i+1})$, mezi kterými hledaný bod leží, a to prostou *lineární aproximací*, která vychází z představy, že v nejbližším okolí hledaného bodu $(x; y)$ můžeme funkci $f(x)$ aproximovat úsekem přímky s vhodnou směrnici

$$y = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i) + y_i \quad (71)$$

Interpolací tedy „doplňujeme“ chybějící experimentální data mezi sousedními měřeními.

Existuje rovněž tzv. *kvadratická interpolace*, která je založena na podobném principu jako interpolace lineární, avšak předpokládá se u ní kvadratický průběh funkce $f(x)$ v okolí hledaného bodu $(x; y)$.

3.1.3 Lineární extrapolace

Lineární extrapolace je vlastně zvláštním případem lineární interpolace. Odlišuje se od ní tím, že hledaný bod $(x; y)$ neleží mezi naměřenými body $(x_i; y_i)$, $(x_{i+1}; y_{i+1})$, ale vně jejich intervalu. Při extrapolaci se dopouštíme tím větší chyby, čím dále leží bod x od bližší z hodnot x_i , x_{i+1} .

Při extrapolaci musíme být mnohem opatrnější než při interpolaci, poněvadž z průběhu závislosti skutečně naměřené usuzujeme na její průběh v oblasti, kde jsme neměřili. Z toho důvodu lze extrapolaci připustit nejvýše v úzkém oboru hodnot pod nebo nad změřeným intervalem a jen tehdy, není-li možné provést dodatečné měření a na jeho základě pak určit požadovanou hodnotu ležící mimo oblast původního měření.

Ve všech případech, kdy je to možné, dáváme přednost interpolaci před extrapolací.

3.1.4 Metoda nejmenších čtverců a metoda skupinová

Metoda nejmenších čtverců je jedna z velmi často používaných metod vyrovnávacího počtu. Podrobně jsme o ní pojednali v kapitole o chybách lineární regrese, a proto se jí na tomto místě zabývat nebudeme.

Metoda skupinová řeší podobný úkol jako metoda nejmenších čtverců: optimalizuje parametry vybrané regresní funkce. Dělá to však skromnějším a poněkud méně účinným způsobem. Zmíníme se jen o její lineární podobě. Úkolem tedy bude proložit lineární regresní funkci

$$y = ax + b \quad (72)$$

experimentálními body $(x_i; y_i)$, kde $i = 1, 2, \dots, n$. V rámci skupinové metody rozdělíme n -tici experimentálních bodů na dvě poloviny (skupiny) s indexy $(1, 2, 3, \dots, k)$ a $(k+1, k+2, \dots, n)$. Předpokládáme, že experimentální body $(x_i; y_i)$ leží v blízkosti regresní přímky (72), tj.

$$y_i \approx ax_i + b \quad (73)$$

Sečteme-li tyto rovnice zvlášť pro první skupinu $(1, 2, 3, \dots, k)$ a druhou skupinu $(k+1, k+2, \dots, n)$ a vydělíme jejich počtem, dostaneme systém dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a, b

$$\frac{\sum_{i=1}^k y_i}{k} \approx a \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} + b \quad (74)$$

$$\frac{\sum_{i=k+1}^n y_i}{n-k} \approx a \frac{\sum_{i=k+1}^n x_i}{n-k} + b \quad (75)$$

Výrazy se sumami připomínají formálně souřadnice „těžišť stejně hmotných bodů“ — odtud také alternativní název: *těžišťová metoda* — avšak z hlediska statistiky jsou to prosté aritmetické průměry \bar{x} a \bar{y} z obou skupin experimentálních dat

$$\bar{x}_{T1} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, \quad \bar{y}_{T1} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i \quad (76)$$

$$\bar{x}_{T2} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n x_i, \quad \bar{y}_{T2} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^n y_i \quad (77)$$

Po dosazení těchto dvou „těžišť“ do výchozí soustavy (74) dostáváme přehlednější systém

$$\bar{y}_{T1} = a\bar{x}_{T1} + b \quad (78)$$

$$\bar{y}_{T2} = a\bar{x}_{T2} + b \quad (79)$$

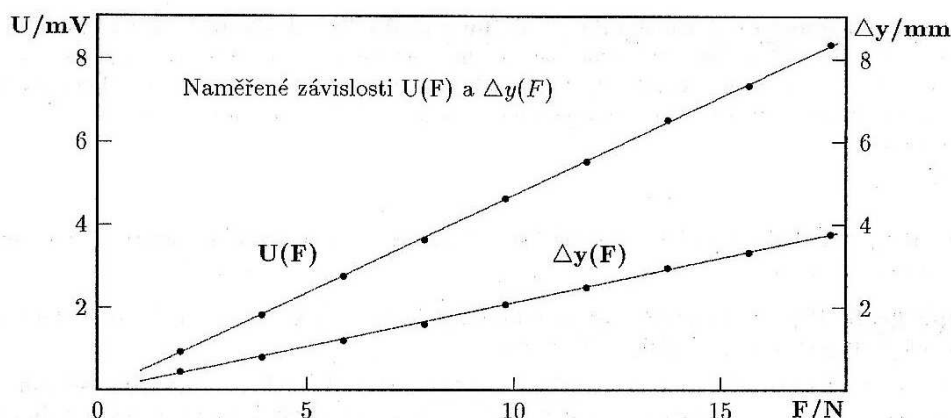
jehož snadným řešením obdržíme „optimalizované“ parametry a, b .

3.2 Grafické zpracování dat

Cílem grafického zpracování je sestrojení grafů naměřených funkčních závislostí. Tato procedura, zdánlivě jednoduchá, však vyžaduje dodržení řady ověřených zásad, které jsou předpokladem optimálního výsledku.

- **Vynášení grafů funkcí více proměnných.** Máme-li graficky znázornit průběh veličiny Y , která je funkcí více proměnných, např. dvou $y = f(x, z)$, postupujeme tak, že vynášíme závislost $y = f(x)$ pro různé hodnoty argumentu z nebo obráceně — vynášíme $y = f(z)$ pro různé x . Výsledkem je složený graf obsahující soubor čar $y = f(x)$ resp. $y = f(z)$ pro různá z resp. x . Tím je převeden problém kreslení grafů funkcí více proměnných na kreslení grafů jedné proměnné.
- **Výběr vhodného grafického papíru.** Existuje řada speciálních grafických papírů s různým typem rastrů usnadňující vynášení bodů. Nejjednodušší a nejčastěji používaný je milimetrový papír vhodný pro vynášení většiny funkčních závislostí. Předpokládá použití lineárních stupnic na obou osách grafu.

Semilogaritmický papír má jednu osu logaritmickou, druhou (x) lineární. Je vhodný pro vynášení exponenciálních závislostí $y = be^{px}$, které linearizuje.



Obr. 1: Tenzometrické a mechanické měření Youngova modulu pružnosti.

Bilogaritmický papír má obě osy logaritmické. Je vhodný pro závislosti mocninného typu $y = cx^d$, které linearizuje. Oba typy logaritmických papírů je možno zakoupit s různým modulem (délkou odpovídající zvětšení vynášené veličiny na desetinasobnou).

Polární papír nemá pravoúhlé souřadné osy, ale polární. Nezávisle proměnná x se vynáší jako úhel ve stupních nebo radiánech a závislá proměnná y jako délka průvodiče. Rozsah úhlů je omezen na interval $< 0; 2\pi >$ radiánů.

- **Volba velikosti grafu a měřítka.** Velikost grafu souvisí se zvolenými měřítky na obou osách grafu. Pro optimální volbu měřítka uvážíme rozsah vynášených veličin $x \in < x_{min}; x_{max} >$ a $y \in < y_{min}; y_{max} >$ a délku os x a y , které máme na grafickém papíře k dispozici. Zvolené měřítko by mělo zaručit, aby úsek znázorňující absolutní chybu veličin, tj. $\vartheta(x)$ resp. $\vartheta(y)$, nebyl menší, než je dílek posledního dělení rastru — u milimetrového papíru 1 mm. Stupnice na osách nemusí začínat od nulové hodnoty a měřítka na osách se mohou vzájemně lišit. Snažíme se využít co největší plochu grafického papíru, který máme k dispozici (miniaturní grafy nejsou vhodné).
- **Vyznačení měřítka na osách.** Vyznačení měřítka na osách se dělá krátkými čárkami s délkou asi 3 mm kolmo k ose a připsáním čísla, která představuje hodnotu čárky ve zvolených jednotkách. Na jedné ose postačí umístit 3–4 čárky rovnoměrně rozložené podél osy.
- **Popis os.** Popis os sestává z vyznačení měřítka a popisu vynášené veličiny. Popis může být i slovní včetně symbolu veličiny následovaným lomítkem a jednotkou — např. „Zatěžovací síle F/N “. Popis osy je s ní rovnoběžně orientován.
- **Vynášení experimentálních bodů $(x_i; y_i)$.** Obsahuje-li graf více křivek, odlišujeme jejich body různými symboly: kroužek, křížek, čtvereček aj.
- **Prokládání křivek vynesnými body.** Dbáme na to, aby vynesená křivka plynule a spojitě sledovala vynesené experimentální body — nemusí nutně všemi body procházet. Při jednoduchém, intuitivním prokládání se držíme pravidla, aby stejný počet experimentálních bodů ležel nad i pod prokládanou křivkou. Existují i důkladnější metody grafického prokládání např. *těžišťová grafická metoda* (obdoba numerické těžišťové — skupinové — metody), avšak v laboratorním cvičení vystačíme s naznačenou intuitivní metodou prokládání.

Při prokládání křivek grafů se musíme předem rozhodnout, zda upřednostníme grafické nebo numerické proložení (metoda nejmenších čtverců), a pak provést proložení jedinou křivkou. V laboratorním cvičení budeme upřednostňovat grafy vykreslené pomocí intuitivní grafické metody před grafy získanými numerickou metodou. Důvod je jednoduchý: u lineárních průběhů získáme odečtem z vykresleného grafu přibližné hodnoty parametrů a , b , které můžeme použít k přibližné kontrole výsledků získaných z numerické metody nejmenších čtverců, která obsahuje řadu numerických úkonů, v nichž se často chybí. Pro další početní zpracování protokolu z měření však zásadně používáme přesnější parametry a , b získané metodou nejmenších čtverců.

- **Odečet parametrů a , b lineárního průběhu z grafu.** Pokud odečítáme hodnotu směrnice přímky (a), je třeba mít na paměti, že na osách mohou být použita obecně různá měřítka, a proto nemůžeme vydávat tangens aktuálně zjištěného úhlu sklonu za hodnotu směrnice, nýbrž musíme vyjít z definice směrnice, jakožto poměru úseků na y-ové a x-ové ose vzatých ve skutečných velikostech a jednotkách

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (80)$$

Obecně tedy směrnice není bezrozměrné číslo, ale její jednotka je dána podílem jednotek použitých na y-ové a x-ové ose.

- **Popis grafu.** Popis grafu můžeme umístit do volné plochy obrázku (název grafu event. další důležité informace: typ vzorku, podmínky měření atd.).

Popis obrázku jako celku (název obrázku včetně dalších celkových informací) umísťujeme zásadně pod obrázek a chronologicky číslujeme, abychom se na obrázek mohli v textu jednoduchým způsobem odvolávat.

4 INSTRUMENTÁLNÍ VYBAVENÍ LABORATORNÍCH CVIČENÍ

V tomto odstavci provedeme stručný popis pomůcek a přístrojů běžně používaných v laboratorním cvičení. Dříve než přikročíme k popisu, bude užitečné shrnout některé důležité zásady čtení hodnot ze stupnic analogových přístrojů.

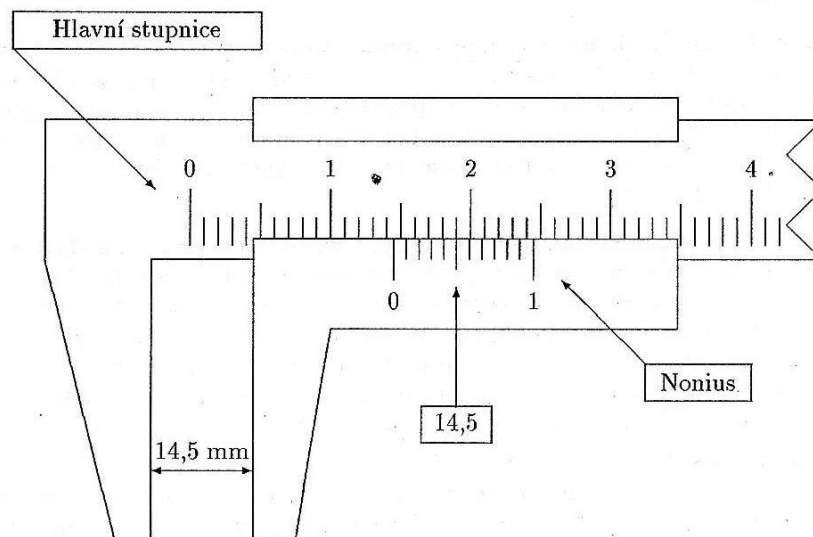
- **Odhadování desetín posledního dělení stupnic.** Na používané stupnici s ručkovým ukazatelem se snažíme odhadovat ještě i *desetiny nejmenšího dělení* (častou pomůckou k přesnějšímu provedení tohoto odhadu slouží (vedle hlavní stupnice) i tzv. nonius, tj. pomocná přídavná stupnice. Požadavek odhadu desetín posledního dělení vede i k omezenému tvaru zápisu hodnot — např. hodnoty odečtené z teploměrné stupnice dělené po $0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ musí končit násobky hodnot $0,02\text{ }^{\circ}\text{C}$, tj. $37,24\text{ }^{\circ}\text{C}$, $63,02\text{ }^{\circ}\text{C}$, $28,18\text{ }^{\circ}\text{C}$ ap.
- **Nulové cifry na posledních místech hodnoty.** V zápisech naměřených hodnot má *nulová cifra uvedená na posledním místě* nebo několika posledních místech svůj význam, který spočívá v interpretaci přesnosti měření: poslední místo zaokrouhleného aritmetického průměru udává řádovou chybu výsledku — je-li z takového místa za desetinnou čárkou nula vypuštěna, nezmění se tím sice číselná správnost aritmetického průměru, ale je tím naznačeno, že chyba průměru je o řád vyšší. Např. hodnota $L = 0,90\text{ m}$ reprezentuje řádovou chybu jednoho centimetru ($\sim 1\%$), ale zápis $L = 0,9\text{ m}$ představuje již chybu jednoho decimetru ($\sim 11\%$), tj. o řád větší.
Výsledky měření uvedené ve tvaru $m = 0,1\text{ kg}$, $t = 2\text{ s}$ ap. jsou z vyšetřovaného hlediska vlastně bezcenné, neboť jsou zatíženy nepřijatelně velkými chybami 100% a 50% . Za velmi přesná považujeme měření s chybou do desetín procenta, za běžnou laboratorní přesnost můžeme považovat chybu do 5% , u běžných minolaboratorních (provozních) měření je přijatelná hranice kolem 20% , málo přesná měření jsou do 50% a nad 50% pak velmi hrubá orientační měření, kterým není přikládána větší vážnost.
- **Paralaktická chyba.** Při odečítání hodnot ze stupnice může vzniknout tzv. *paralaktická chyba* z úkosu — čtení ze stupnice pod různými úhly. Vyloučení této chyby dosáhneme čtením ve směru kolmém (normálovém) k rovině stupnice. Z toho důvodu bývají často stupnice ručkových přístrojů opatřeny zrcátkem umožňujícím nalézt kolmý směr čtení — ručka a její obraz v zrcadle se musí krýt.
- **Potlačení chyby z nerovnoměrnosti dělení stupnic.** Některé lineární stupnice, zejména u délkových měřidel (svinovací měřidla, pravítka ap.) trpí výrobní vadou — dílky posledního dělení jsou v některých místech stupnice nepatrně více nebo méně nahuštěny. Aby se potlačila chyba čtení z nerovnoměrné „nelineární“ stupnice, posouvá se měřený předmět podél celé stupnice a v každé poloze se zjišťuje jeho délka rozdílem obou konců. Soubor měření se pak zpracovává standardním způsobem.

4.1 Délková měřidla

Svinovací délková měřidla (svinovací metr nebo dvoumetr) mají dělení po 1 mm . Čteme na nich s přesností na celé milimetry, ale odhadujeme na nich i desetiny milimetru.

Posuvné měřítko (viz obr. 2) se používá pro přesnější měření. Desetiny milimetru jsou zde určovány přesně pomocí nonia — pomocné stupnice. Noniová pomocná stupnice dostala svůj název z latinského devátý — nonius. V původním provedení totiž devíti dílkům hlavní stupnice odpovídalo deset dílků nonia. Při tomto provedení desetinného nonia je tedy každý dílek nonia kratší o $1/10$ ve srovnání s příslušným dílkem hlavní stupnice. Kryje-li se n -tý dílek nonia s dílkem hlavní stupnice, je vzdálenost mezi počátkem nonia (ukazatelem) a nejbližším levým dílkem hlavní stupnice roven n desetinám dílku hlavní stupnice. Novější typy posuvek mají nonius dvacetinný, tj. devatenácti dílkům hlavní stupnice (19 mm) odpovídá 20 dílků nonia ($19/20\text{ mm} = 0,95\text{ mm}$), což umožňuje čtení délek s přesností na $0,05\text{ mm}$. Před měřením posuvkou provedeme kontrolu nulové polohy: při doražených čelistech se kryjí nuly obou stupnic (hlavní a nonia) — v opačném případě je třeba provést mechanickou opravu posuvky nebo *početní korekci* měřených hodnot. Korekci provedeme tak, že nejprve provedeme čtení posunuté nulové polohy a to ve stejném počtu jako u měřené délky. Odečtením aritmetických průměrů (měřená délka minus posunutá

nulová poloha) dostaneme správnou hodnotu měřené délky. Pozor na skutečnost, že posunutá nulová poloha může nabývat i záporné hodnoty.



Obr. 2: Schéma posuvného měřítka.

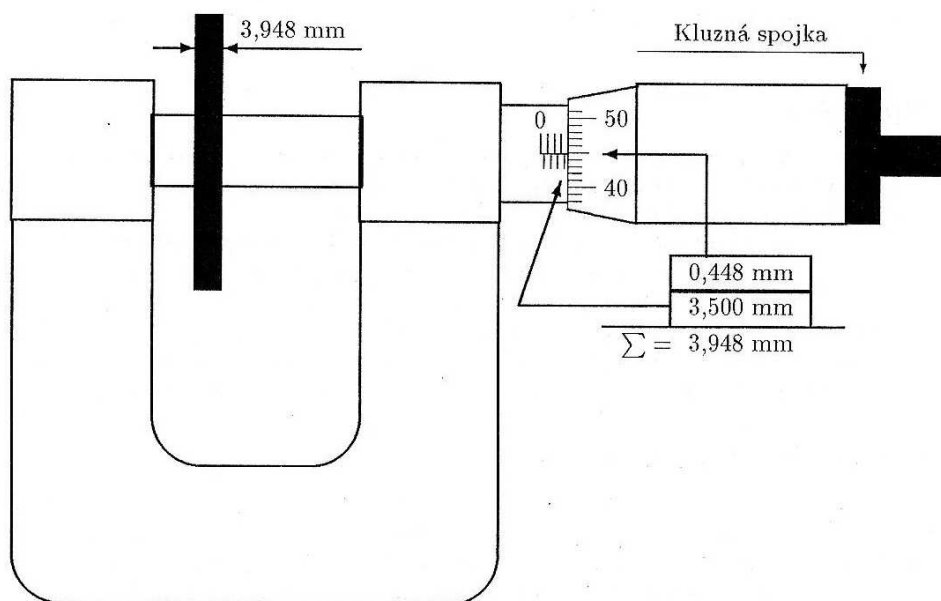
Mikrometrický šroub (viz obr. 3) slouží k přesným měřením malých délek do 25 mm (přesnost setiny milimetru, odhadujeme tisíciny milimetru). Měřený předmět vkládáme mezi pevnou a pohyblivou čelist. Pohyblivá čelist je součástí přesně řezaného šroubu se stupnicí 0,5 mm/ot. Obvod hlavice šroubu — tzv. bubínek — nese kulatou stupnici s 50 dílky. Jeden dílek kulaté stupnice je $0,5 \text{ mm}/50 = 0,01 \text{ mm}$, přičemž odhadujeme i desetiny tohoto dílku, tj. tisíciny milimetru. Hrana oběžného bubínku ukazuje na hlavní stupnici pevné hřídele celé milimetry a jejich poloviny (zdvojená pevná stupnice). Celý údaj dostaneme tedy sečtením hodnot z pevné a otočné stupnice. Dotahování čelisti provádíme zásadně přes kluznou spojku („řehtačku“) umístěnou na konci bubínku. Před měřením mikrometrickým šroubem provedeme kontrolu nulové polohy; při dotažených čelistech se kryjí nuly pevné a otočné stupnice — v opačném případě je třeba provést mechanickou opravu šroubu nebo početní korekci měřených hodnot. Korekci provádíme stejným postupem jako u posuvného měřítka.

Indikátorové hodinky jsou ručkovým přístrojem kruhového tvaru s výsuvným hrotem. Posun hrotu, kterým se měření délky uskutečňuje, je spojen s ručkou obíhající po kruhové stupnici se 100 dílky — jeden oběh ručky představuje 1 mm, jeden dílek stupnice je tedy 0,01 mm, přičemž můžeme odhadovat i desetiny těchto dílků, tj. tisíciny milimetru. Jde o stejnou přesnost měření jako u mikrometrického šroubu. Na indikátorových hodinkách bývá ještě pomocná malá kulatá stupnice na počítání celých otáček velké ručky, tj. na počítání celých milimetrů.

Sférometr se užívá na přesné zjištění výšky kulových vrchlíků. Je ve tvaru trojnožky — pevné hroty umístěné v rozích rovnostranného trojúhelníku. Ve středu trojúhelníku je umístěn ještě čtvrtý pohyblivý hrot, kterým se po přiložení trojnožky k vrchlíku uskutečňuje měření. Pohyb hrotu se převádí buď na indikátorové hodinky (posuvný pohyb) nebo na mikrometrický šroub (otáčivý hrot). Přesnost měření je tedy stejná jako u mikrometrického šroubu nebo indikátorových hodinek.

4.2 Časová měřidla

V laboratorním cvičení používáme stopky dvojího druhu: klasické mechanické a digitální řízené piezoelektrickým krystalem.



Obr. 3: Schéma mikrometrického šroubu.

Doba oběhu ručky mechanických stopek je 60 s. Kromě sekundového dělení se vyskytuje i dělení na setiny minuty. Vzhledem k nepřesnostem při uvedení stopek do chodu a při jejich zastavení nelze jimi dosáhnout větší přesnosti měření časových intervalů než asi 0,2 s. Přesnost odečítání doby trvání periodických dějů lze *zvýšit* tím, že se měří doba trvání většího počtu period. Chyba stopek způsobená nepřesným chodem bývá při krátkodobých měřeních zanedbatelná proti chybám nepřesného zachycení počátku a konce měřeného děje (zmiňovaných 0,2 s). Při měření intervalů delších než několik minut může však již chod stopek mít zanedbatelný vliv na přesnost měření.

Pro měření velmi krátkých časových intervalů nelze stopek použít vůbec vzhledem k zapínací a vypínací chybě 0,2 s. V takových případech musí nastoupit digitální přístroje s čidlem automatického zapínání a vypínání.

4.3 Váhy

V laboratorních cvičeních jsou používány mechanické netlumené rovnoramenné laboratorní váhy, dále tlumené automatické jednomiskové založené rovněž na mechanickém principu a jednomiskové automatické digitální váhy.

Hlavní měření jsou prováděna na dvouramenných mechanických vahách. Podmínka rovnováhy na těchto vahách je rovnost momentů tíhových sil. U dvouramenného vahadla navíc žádáme, aby se při stejném zatížení misek zastavilo v nějaké stabilní poloze. Toho dosáhneme, kdy umístíme těžiště nezatíženého vahadla do malé vzdálenosti pod osu otáčení. Vzdálenost vysunutého těžiště od osy otáčení má vliv na tzv. citlivost c vah, kterou definujeme jako poměr výchylky Δd v dílcích stupnice vahadla k přírůstku Δm , které vychýlení způsobilo

$$c = \frac{\Delta d}{\Delta m} \quad \text{v jednotkách} \quad \left(\frac{\text{dílek}}{\text{mg}} \right) . \quad (81)$$

Citlivost zjišťujeme na zatížených vahách. Známe-li citlivost vah, nemusíme váhy při vážení přesně vyvažovat, ale z počtu dílků d_o výchylky od rovnovážné polohy určíme chybějící přívazek m

$$m = \frac{d_o}{c} . \quad (82)$$

Je důležité, abychom před vážením ustavili váhy do vodorovné polohy (stavěcí šrouby s libelou nebo olovničkou), při změnách zátěže používali aretačního mechanismu a při přesunech drobných plíškových závaží používali pinzetu.

4.4 Teploměry

K měření teplot se v laboratorním cvičení používají přesné skleněné rtuťové teploměry pracující na principu objemové tepelné roztažnosti rtuti. Rtuťových teploměrů lze v podstatě používat v rozsahu teplot mezi bodem tání a varu rtuti ($-35\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $300\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Při měření kapalnými teploměry existuje několik zdrojů chyb: paralaktická chyba, mrtvý chod rtuti, nedodržení svislé polohy teploměru při měření, absorpce plynu v kapiláře, hystereze skla, rozdíl teplot rtuti a baňky teploměru při měření aj. Zejména poslední z nich se často uplatňuje při měření. K jejímu uplatnění je třeba, aby byl teploměr ponořen v lázni tak hluboko, že sloupec rtuti vyčnívá pouze několik milimetrů nad hladinou lázně, aby bylo možno teplotu odečíst. Tato chyba může dosáhnout několika desetin stupně při běžných pokojových teplotách, při vyšších teplotách až několik stupňů.

4.5 Měřidla elektrických veličin

Na měření elektrických veličin se v laboratorním cvičení používají přístroje trojího typu: klasické analogové ručkové s pasivním zpracováním signálu (nevyžadují vlastní zdroj energie), analogové elektronické ručkové přístroje s aktivním zpracováním signálu (vyžadují vlastní zdroj energie — např. baterii) a digitální přístroje s displejem vyžadující vlastní zdroj napájení. Ve cvičeních půjde převážně o měření napětí a proudu v měřicích obvodech, tj. používání voltmetrů a ampérmetrů. Oba tyto přístroje se zásadně liší způsobem zapojení do obvodů: voltmetr zapojujeme paralelně (bočníkově) k měřené obvodové komponentě, na které se má zjistit elektrické napětí, zatímco ampérmetr vyžaduje rozpojení obvodu v místě, kde má být měřena hodnota proudu a sériové zařazení k ostatním komponentám. Způsob jejich zapojení determinuje i hodnotu jejich vnitřních odporů tak, aby došlo k co nejmenšímu ovlivnění obvodu: voltmetr by měl mít co největší vnitřní odpor, ampérmetr co nejmenší. Univerzální přístroje mají přepínání a tím i volbu mezi měřením proudu a napětí jak ve stejnosměrném, tak střídavém režimu. Všimněme si nyní několika základních společných charakteristik ampérmetrů a voltmetrů:

- **Režim měření přístroje** určuje jeho použití buď pro měření stejnosměrného nebo střídavého proudu resp. napětí. Na přístrojích je vyznačen střídavý režim vlnovkou a stejnosměrný režim vodorovnou čárkou nebo rovnítkem. Většina přístrojů v praxi je univerzální s možností přepínání mezi oběma režimy.
- **Rozsah přístroje** je údaj o maximální výchylce přístroje, který nesmí být během měření překročen. Většina měřicích přístrojů má přepínatelné rozsahy. Z důvodu co nejmenší experimentální chyby se doporučuje měřit na takovém rozsahu, aby měřené hodnoty nemusely být čteny v první čtvrtině stupnice, ale v jejích zbývajících třech čtvrtinách. Pokud neznáme přibližně hodnotu měřeného proudu předem, volíme největší rozsah, aby nedošlo k poškození přístroje.
- **Vnitřní odpor přístroje** je elektrický odpor mezi svorkami přístroje a lze ho vyčíst z údajů na přístroji (uvedených obvykle na jeho druhé straně). U voltmetru bývá zadávána univerzální konstanta k v jednotkách Ω/V přímo na stupnicích přístrojů, po jejímž vynásobení zvoleným rozsahem U_r/V dostáváme vnitřní odpor R_v

$$R_v = k \cdot U_r \quad (83)$$

U ampérmetrů tomu tak nebývá a jeho vnitřní odpor R_a je třeba vypočítat z výrobcem zadaného napěťového úbytku $\Delta U_u/\text{V}$ pro zvolený proudový rozsah I_r/A

$$R_a = \frac{\Delta U_u}{I_r} \quad (84)$$

Pokud na voltmetru nenalezneme univerzální odporovou konstantu, je třeba postupovat podobně jako u ampérmetru a jeho vnitřní odpor R_v stanovit rovněž pomocí Ohmova zákona z výrobcem zadaného proudového úbytku ΔI_u na zvolený rozsah U_r

$$R_v = \frac{U_r}{\Delta I_u} \quad (85)$$

- **Poloha přístroje při měření** se týká pouze ručkových přístrojů. Je určena konstrukcí přístroje a cejchováním. Polohu přístroje předepsanou výrobcem experimentátor zjistí opět ze značek na přístroji. Vodorovná poloha je značená vodorovnou čarou, kolmá poloha (panelové přístroje) geometrickou značkou pro kolmý směr a skloněný směr značkou úhlu s jeho velikostí. Nedodržení měřicí polohy vede k větší systematické chybě měření.
- **Třída přesnosti přístroje** bývá udávána na stupnici v procentech a je to relativní chyba vztažená k aktuálnímu rozsahu přístroje.

Vlastnosti přístrojů diskutované v předešlých bodech a některé další bývají uvedeny v podobě symbolických značek v rohu stupnic přístrojů.

4.6 Měřidla osvětlení

K měření osvětlení jsou používány tzv. luxmetry, které se skládají z fotoodporového čidla, zdroje proudu a měřidla — voltmetru, jehož stupnice je cejchována v jednotkách osvětlení — luxech. Jde tedy v podstatě o voltmetry a platí o nich vše, co bylo řečeno v předešlé kapitole o elektrických přístrojích.

5 PROTOKOL O MĚŘENÍ

Protokol o měření je trvalým dokladem o provedeném a zpracovaném měření. Studenti zpracovávají měření provedené v laboratorním cvičení samostatně formou domácí práce. Odevzdání protokolu z minulého měření na začátku každého cvičení je nutnou podmínkou k tomu, aby mohli pokračovat další úlohou. Protokol se píše čitelně a úhledně perem nebo psacím strojem (počítačovou tiskárnou) nejlépe na nelinekovaný dvojlist formátu A4. Schéma, nákresy a tabulky se rýsují tužkou, tuší nebo tisknou na počítačové tiskárně; hodnoty do tabulek se vpisují perem, tuší nebo se tisknou. Grafy se dělají zásadně na milimetrový papír a to podle zásad vyložených v kapitole: Grafické zpracování výsledků. Protokol musí být vypracován pečlivě, přehledně a věcně tak, aby každý po přečtení protokolu věděl, jaká veličina byla měřena, jakou metodou a jakých výsledků bylo dosaženo. Protokol se člení do čtyř hlavních částí: I. Záhlaví, II. Teoretický úvod, III. Měření a zpracování, IV. Závěr.

- I. **Záhlaví** protokolu sestává z čísla a názvu úlohy, jména a příjmení studenta a jeho spolupracovníka, data měření a odevzdání a dále ročníku a studijní skupiny. Předpis (tabulku) pro záhlaví je možno si na čistopis protokolu natisknout razítkem v laboratoři.

Pod záhlaví se uvádí barometrický tlak, teplota a vlhkost vzduchu v laboratoři v době měření.

- II. **Teoretický úvod** slouží ke stručnému nástinu teorie úlohy: co se měří (definice měřených veličin), jak se měří, nákres měřicí aparatury, pomůcky, vyhodnocovací vztahy, rovnice ap.

- III. **Měření a zpracování** obsahuje tabulky s měřenými veličinami (viz např. tabulky v kapitole metoda nejmenších čtverců a postupná metoda). U každé veličiny X , která je měřena opakovaně, se provádí výpočet pravděpodobné chyby absolutní i relativní. Výsledek zapisujeme v *zaokrouhleném* tvaru

$$X = (\bar{x} \pm \bar{\vartheta}(x)) \quad (\text{jednotka}) \dots\dots \bar{q}(x) \% \quad . \quad (86)$$

Zásady zaokrouhlování chyb a aritmetických průměrů viz kapitola: Zásady výpočtu chyb měření. K protokolu se přikládají grafy rýsované na milimetrovém papíru. Přikládá se i pracovní list s datem konání měření a podpisem učitele.

- IV **Závěr** je poslední částí protokolu a obsahuje shrnutí výsledků, jejich srovnání s hodnotami vzatými z fyzikálních tabulek a diskusi shody či neshody výsledků s tabulkovými hodnotami. Provedeme výpočet nejen náhodných chyb, ale pokusíme se také o odhad soustavných chyb. Vysvětlení možných diskrepancí patří rovněž do diskuse výsledků.

6 ORGANIZAČNÍ POKYNY PRO PRÁCI V LABORATORII

6.1 Příprava na laboratorní cvičení

Má-li mít laboratorní cvičení hladký průběh, je nutná příprava studentů na cvičení. Vyžaduje se písemná příprava na volné listy A4 a má obsahovat minimálně tyto položky:

- Číslo a název laboratorní úlohy.
- Poznámky a výpisy ze skript nebo jiné vhodné literatury vztahující se k dané úloze.
- Připravené kolonky pro zápis barometrického tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu v laboratoři.
- Příprava tabulek (předkreslené tabulky) pro zápis měřených veličin.
- Poznamenané hodnoty fyzikálních konstant potřebných k úloze.

6.2 Průběh laboratorního cvičení

Vlastní průběh cvičení můžeme stručně shrnout do několika bodů:

- Na počátku cvičení se odevzdávají protokoly z minulého měření. Neodevzdání bez vážného důvodu může mít za následek vyřazení z dalšího měření až do splnění studijních povinností.
- Není-li prokázána řádná příprava, nebude možné provést měření v plánovaném termínu a student si musí nahradit úlohu v jiném sinluveném termínu.
- Vyzvednutí pracovních pomůcek a přístrojů.
- Sestavení měřicí aparatury a konzultace správnosti sestavení s učitelem.
- Vlastní měření.
- Po skončení měření si nechá student potvrdit naměřené údaje učitelem.
- Vracení pomůcek a uvedení pracoviště do původního stavu.

6.3 Provozní řád

Pro provoz studentských laboratoří bylo stanoveno na základě předchozích zkušeností několik závazných pokynů:

- Šaty a tašky se odkládají pouze na určených místech.
- Vzhledem k nutnosti udržovat čistý laboratorní provoz je nutné používat v laboratořích přezůvky.
- Na pracoviště je dovoleno brát pouze věci nutné k měření.
- Během měření se studenti zdržují na svých pracovištích.
- Studenti během měření dodržují zásady bezpečnosti práce tak, aby svým chováním neohrožovali zdraví své ani ostatních.
- Svévolné poškození zařízení je řešeno přestupkovým řádem.