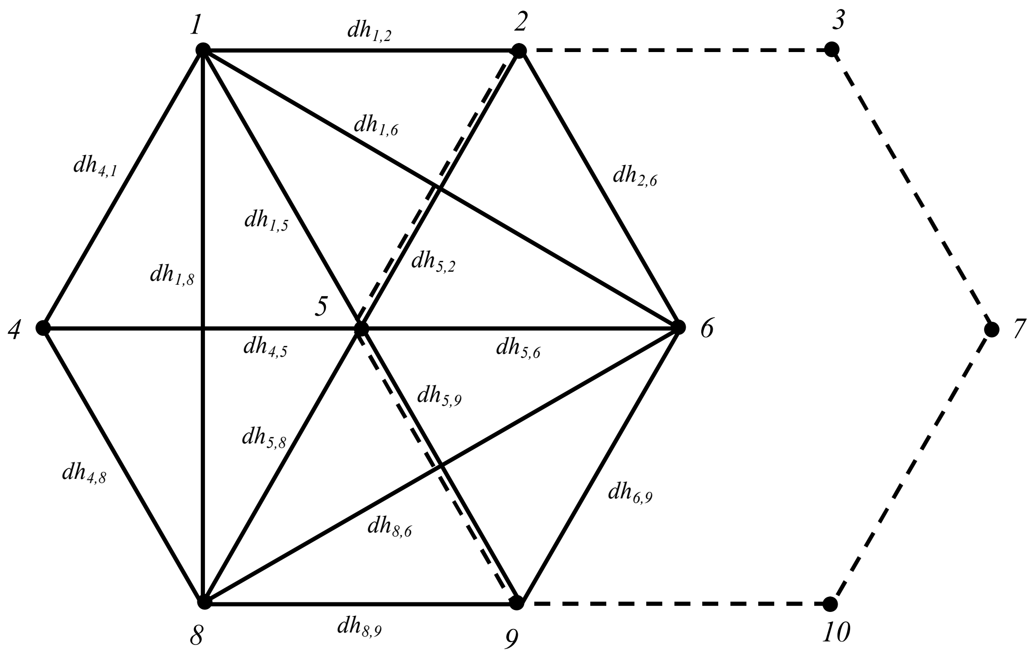
<table>
<tr><td colspan="6">ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ - OBOR GEODÉZIE A KARTOGRAFIE
KATEDRA VYŠŠÍ GEODÉZIE</td></tr>
<tr><td colspan="6">název předmětu
VYŠŠÍ GEODÉZIE 21</td></tr>
<tr><td>číslo úlohy
1</td><td colspan="5">název úlohy
Výpočty výšek, sekvenční vyrovnání</td></tr>
<tr><td>školní rok
2002/03</td><td>semestr
7</td><td>skupina
64</td><td>zpracoval
Zdeněk Nejedlý</td><td>datum
29.9.2003</td><td>e-mail
rsc@email.cz</td></tr>
</table>

Zadání:
Nivelační síť v systému ČSJNS je tvořena 10 body, viz schematický obrázek. Síť byla zaměřena geometrickou nivelací ze středu ve dvou nezávislých etapách.
V první etapě byl zaměřen pravý obrazec sestávající se z bodů 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10. Tato část sítě byla samostatně vyrovnána, přičemž výška bodu 6 byla váhována (tzv. *constraint*) na apriorní hodnotě H_6^0 se střední chybou 0,001 *mm*.
Z řešení této etapy je k dispozici kompletní kovarianční matice, aposteriorní jednotková střední chyba, počet stupňů volnosti a výsledné hodnoty vyrovnaných výšek.
V druhé etapě byl opět metodou geometrické nivelace ze středu zaměřen levý obrazec (body 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9), k dispozici je 15 měřených převýšení, přibližné zeměpisné souřadnice a měřená tíhová zrychlení v koncových bodech oddílů a přibližné délky oddílů.
Vyřešte následující příklady:

Příklad 1.1 S využitím metody nejmenších čtverců vypočtěte normální (Moloděnského) výšky bodů zaměřených v druhé etapě. Výšku bodu 1 fixujte na dané hodnotě H_1^0. Střední chyba měřeného převýšení je rovna $m = m_0\sqrt{L}$, kde m_0 je střední kilometrová chyba nivelace $m_0 = 1$ *mm*.

Příklad 1.2 Obě etapy společně vyrovnejte. Využijte k tomu daných údajů z první etapy a normálních rovnic z etapy druhé. Společné vyrovnání má být provedeno tak, aby byl fixován pouze bod 1 z druhé etapy.



Číselné zadání:

apriorní střední chyba jednotková $\overline{m}_0 = 0.001\ m$

Levá část:

fixní výška bodu 1 = 230.12340 *m*

měřená převýšení:

převýšení			délka
z	na	[*m*]	[*km*]
1	2	-8.59970	1.256
2	6	70.70820	1.855
6	9	-66.75710	0.882
9	8	30.15020	1.309
8	4	10.26830	0.931
4	1	-35.77480	1.879
5	1	-21.26150	1.372
5	2	-29.85960	1.217
5	6	40.85010	1.297
5	9	-25.90400	0.912
5	8	4.24420	1.230
5	4	14.51300	0.825
1	6	62.11410	1.017
6	8	-36.60750	1.425
8	1	-25.50800	1.060

body sítě:

bod	výška [*m*]	φ [*rad*]	g [m/s^2]
1	230.123	0.8726650	9.8100980
2	221.526	0.8725940	9.8104680
6	292.241	0.8725410	9.8107150
9	225.480	0.8729970	9.8102670
8	255.630	0.8729440	9.8099980
4	265.900	0.8723840	9.8105390
5	251.386	0.8726380	9.8106840

Pravá část:

vyrovnané výšky bodů:

bod	výška [*m*]	m_i [*m*]
2	221.626544	-1.000000
3	269.015126	-1.000000
7	259.338222	-1.000000
10	245.174464	-1.000000
9	225.579454	-1.000000
5	251.485897	-1.000000
6	292.340900	0.001000

matice ***N*** (t.j $\boldsymbol{Q}^{-1}$, pořadí viz vyrovnané výšky)

$$
\begin{pmatrix}
1.9914250644 & -0.6169031462 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & -0.7272727273 & -0.6472491909 \\
-0.6169031462 & 1.9168638749 & -0.5025125628 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & -0.7974481659 \\
0.0000000000 & -0.5025125628 & 2.4417709268 & -0.7315288954 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & -1.2077294686 \\
0.0000000000 & 0.0000000000 & -0.7315288954 & 2.4365762746 & -1.0548523207 & 0.0000000000 & -0.6501950585 \\
0.0000000000 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & -1.0548523207 & 2.3672990348 & -0.6501950585 & -0.6622516556 \\
-0.7272727273 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & 0.0000000000 & -0.6501950585 & 2.4848874979 & -1.1074197121 \\
-0.6472491909 & -0.7974481659 & -1.2077294686 & -0.6501950585 & -0.6622516556 & -1.1074197121 & 6.0722932516
\end{pmatrix}
$$

bod 6 "fixován/constrained" na výšce H6fix = 292.34090 *m* se střední chybou sig6fix = 0.001 *m*

aposteriorní střední chyba jednotková m_0 = 0.0005614 *m*

počet stupňů volnosti = 6

Poznámka:

Rovnice oprav pro pseudoměření je ve tvaru v = H6vyr - H6fix a tedy k matici ***A*** je připojen řádek s +1 na příslušném místě

Hodnoty u kterých nejsou uvedeny jednotky, jsou v metrech a nebo jsou bezrozměrné

Teoretické řešení

1) Ortometrická (nadmořská) výška

Je dána vztahem

$$H = \frac{1}{g_m}\int_O^H g dh = \frac{W_0 - W}{g_m} \tag{1.01}$$

kde g_m je integrální střední hodnota tíhového zrychlení na tížnici
$W_0 - W$ je geopotenciální kóta (záporný rozdíl tíhového potenciálu W v bodě na povrchu Země a tíhového potenciálu W na geoidu
O je bod o nulové nadmořské výšce ($W_O = W_0$)
H je bod o nadmořské výšce H

Z tohoto výrazu plyne, že hladinová plocha tíhového potenciálu není obecně plochou stejné nadmořské výšky.
Určené ortometrické výšky je problematické, protože hodnotu g_m nelze zjistit přímým měřením a ani není znám průběh rozložení hustoty mezi zemským povrchem a geoidem, ze kterého by se hodnotu g_m dala vypočítat.

Ortometrická oprava převýšení

Udává změnu ortometrické výšky v závislosti na změně geocentrické šířky koncových bodů nivelovaného úseku. Přibližnou hodnotu určíme ze vztahu

$$\underbrace{C_\gamma^{AB}}_{[mm]} = -0.000'025'4 \cdot \underbrace{H_S}_{[m]} \cdot \underbrace{\Delta\varphi}_{['']} \tag{1.02}$$

kde H_S je střední výška koncových bodů měřeného převýšení
$\Delta\varphi$ je rozdíl zeměpisných šířek koncových bodů měřeného převýšení

Tíhové anomálie

Smíšená tíhová anomálie je rozdíl v velikosti vektoru tíhového zrychlení g v bodě P_1 na geoidu a vektoru γ v bodě P_0 na elipsoidu. Určí se podle vztahu

$$\Delta g = g(P_1) - \gamma(P_0) \tag{1.03}$$

kde $g(P_1)$ je tíhové zrychlení na povrchu geoidu
$\gamma(P_0)$ je normální tíhové zrychlení na povrchu hladinového elipsoidu

Rozdíl ve směrech výše uvedených vektorů je tížnicová odchylka ε.

Podmínka Stokesova řešení odlehlosti geoidu od elipsoidu je ta, aby poruchový potenciál T definovaný na okrajové ploše byl harmonickou funkcí ($\Delta T = 0$). Tato podmínka je splněna v případě neexistence hmotností vně geoidu.
Protože však hmotnosti vně geoidu existují, musí být před aplikací Stokesova integrálu zajištěno jejich přesunutí do vnitřní oblasti geoidu nebo jejich odstranění, což je důvodem pro zavádění různých tíhových redukcí.
Proces odstranění vlivu vnějších hmotností se nazývá regularizace geoidu. Tato regularizace způsobuje změny v průběhu geoidu, což se nazývá nepřímý efekt regularizace. Takto změněný geoid se nazývá regularizovaný geoid nebo kogeoid.
Vhodnost a účinnost tíhové redukce se proto posuzuje podle toho, jak velký nepřímý efekt vyvolává, jaký má fyzikální význam, jednoduchost výpočtu a podobně.

Fayova redukce a tíhová anomálie

Součástí každé tíhové redukce je přemístění bodu P z povrchu Země do bodu P_1 na geoidu. Bod P se poté nachází v prázdném prostoru nad geoidem a tato tíhová redukce se proto nazývá tíhová redukce na volném vzduch nebo Fayova redukce. Určí se podle vztahu

$$\delta F = -\frac{\delta\gamma}{\delta h}H = +0.3086 \cdot 10^{-5} H \qquad [m \cdot s^{-2}] \tag{1.04}$$

Tíhová anomálie Δg ve které nezavedeme žádné opravy z vlivu hmotností mezi zemským povrchem a geoidem se nazývá anomálie na volném vzduchu (Fayova anomálie) a je dána vztahem

$$\Delta g_F = g(P) + \delta_F - \gamma(P_0) = g_F(P_1) - \gamma(P_0) \tag{1.05}$$

kde $\quad g_F$ je hodnota Fayova tíhového zrychlení

Redukcí je tedy vliv přenosu hodnoty normálního tíhového zrychlení z bodu P na povrchu Země do bodu P_1 na geoidu, což je velmi jednoduchý model ne kterém jsou hmotnosti vně geoidu ignorovány. Přesto jde o nejčastěji využívanou redukci. Tato anomálie má zanedbatelný nepřímý efekt, ale výrazně závisí na reliéfu povrchu Země. Odstranění této nevýhody se přenáší na Bouguerova anomálie.

Bouguerova redukce a tíhová anomálie
Tato redukce přidává vliv hmotnosti mezi zemským povrchem a geoidem. Zvolíme model válce o výšce H (nadmořská výška bodu P), poloměru a (limitně se blíží k nekonečnu) a s homogenní hustotou σ (standardní hustota svrchní Zemské kůry). Dá se odvodit (viz. skripta Fyzikální geodézie 10, str. 161), že tato hmotná deska působí na tíhové zrychlení g v bodě P na povrchu Země silou $2\pi G\sigma H$. Tento vliv odstraníme tak, že tuto hodnotu odečteme od měřeného tíhového zrychlení, čímž dostáváme Bouguerova redukci δ_B která spolu s Fayovou redukcí δ_F tvoří tzv. úplnou Bouguerova redukci δ^1_B danou vztahem

$$\delta_B^1 = \delta_F - 2\pi G\sigma H = \delta_F - 0.1119\cdot 10^{-5} H \qquad [m\cdot s^{-2}] \tag{1.06}$$

Bouguerova anomálie je poté

$$\Delta g_B^1 = g(P) - \gamma(P_0) + \delta_F - \delta_B^1 \tag{1.07}$$

Tyto anomálie mají dobré interpolační vlastnosti, jsou velké svou hodnotou, ale hladké v průběhu. Pro určení tvaru geoidu se příliš nehodí, protože mají extrémně velký nepřímý efekt který až o řád přesahuje zvlnění samotného geoidu.

Oprava z tíhových anomálií
Určíme jí ze vztahu

$$\underbrace{C_{(g-\gamma)}^{AB}}_{[mm]} = 0.001'019'3\cdot \underbrace{(g_F - \gamma)_S}_{[mGal]} \underbrace{h_{měř}^{AB}}_{[m]} \tag{1.08}$$

kde $\quad \gamma$ je normální tíhové zrychlení dané Helmertovým vzorcem

$$\gamma_H = 978030(1 + 0.005302\sin^2\varphi - 0.000007\sin^2 2\varphi) \qquad [mGal] \tag{1.09}$$

$_S$ představuje střední hodnotu, tedy aritmetický průměr hodnot g a γ sousedních bodů

Výpočet normálního převýšení

$$\overline{h}^{AB} = h_{měř}^{AB} + C_\gamma^{AB} + C_{(g-\gamma)}^{AB} \tag{1.10}$$

2) Vyrovnání s pomocí pseudoměření

Pseudoměření je možné při vyrovnání využít tehdy, je-li systém normálních rovnic singulární (matice ***A*** obsahuje lineárně závislé sloupce) a nahradit tak vyrovnání měření zprostředkujících s podmínkami. Princip spočívá v tom, že se k systému rovnic oprav přidají další řádky (matice ***B***, viz vzorec (*2.02*)) tak, aby byla odstraněna závislost sloupců (přidají se další pseudoměření), čímž vznikne nový systém rovnic oprav (dále bude označen vlnovkou ~)

$$\tilde{v} = \tilde{A} \cdot x + \tilde{l} \tag{2.01}$$

což můžeme rozepsat jako

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} l \\ b \end{pmatrix} \tag{2.02}$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P_B \end{pmatrix} \tag{2.03}$$

kde $w = B \cdot x + b$ je linearizovaná rovnice oprav pro pseudoměření (*2.04*)
P_B je příslušná matice vah pseudoměření (viz (*2.07*)).

Pseudoměření se obvykle použijí tam, kde je třeba fixovat výslednou hodnotu některé neznámé na předem známé hodnotě (např. při vyrovnání volné sítě). V našem případě jde o nivelační síť ve které známe přesnou výšku H_i^{FIX} jednoho bodu. Pseudoměření má poté tvar $H_i = H_i^{FIX}$ (*2.05*)

takže

$$w = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_i \\ \vdots \\ H_n \end{pmatrix}}_{x} - \underbrace{H_i^{FIX}}_{b} \tag{2.06}$$

$$P_B = p_i = \frac{m_0^{\,2}}{m_i^{\,2}} \tag{2.07}$$

což znamená, že (v tomto případě) jednořádková matice ***B*** obsahuje prvek +1 ve sloupci odpovídajícímu fixovanému bodu a jednoprvkový vektor ***b*** obsahuje výšku tohoto bodu. Vyrovnání poté můžeme provést jako

$$\tilde{N} = \tilde{A}^T \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{A} \tag{2.08}$$

$$\tilde{Q} = \tilde{N}^{-1} \tag{2.09}$$

Vyrovnané hodnoty neznámých (v případě výškové sítě jsou vztahy lineární (matice $\tilde{A}$ obsahuje prvky *0*, *–1* a *+1* a vektor $\tilde{l}$ přímo hodnoty normálních převýšení (plus výšku fixovaného bodu na příslušném místě)) a díky aplikaci pseudoměření získáme přímo vyrovnané hodnoty neznámých (vektor ***x***), ne pouze jejich přírůstky)

$$x = \tilde{Q} \cdot \tilde{A}^T \cdot \tilde{P} \cdot \tilde{l} \tag{2.10}$$

se středními chybami

$$m_{x_i} = \overline{m}_0 \sqrt{N_{ii}^{-1}} = \overline{m}_0 \sqrt{\tilde{Q}_{ii}} \tag{2.11}$$

Vektor oprav zprostředkujících

$$\tilde{v} = \tilde{A} \cdot x - \tilde{l} \tag{2.12}$$

se středními chybami

$$m_{l_i} = \bar{m}_0 \sqrt{\tilde{A} \cdot \tilde{Q}_{ii} \cdot \tilde{A}^T} \tag{2.13}$$

a aposteriorní střední chyba jednotková

$$m_{0,2} = \sqrt{\frac{\tilde{v}^T \tilde{P} \tilde{v}}{n-k}} \tag{2.14}$$

kde n je počet zprostředkujících (měření)
k je počet neznámých (určovaných bodů)

3) sekvenční vyrovnání se změnou vektoru neznámých

Sekvenční vyrovnání se použije tehdy, je-li možné měření rozdělit na několik etap a tyto etapy samostatně vyrovnat. Z každé etapy tak získáme matici normálních rovnic $\boldsymbol{N_i}$, vektor vyrovnaných neznámých $\boldsymbol{x_i}$, aposteriorní střední chybu jednotkovou $m_{0,i}$ a počet stupňů volnosti (nadbytečných měření) s_i. Pomocí těchto prvků můžeme poté provést společné vyrovnání všech etap bez potřeby znalosti vektoru měření $\boldsymbol{l_i}$.
Rovnice oprav můžeme v případě lineárních vztahů napsat jako

$$\tilde{v} = \tilde{A} \cdot \tilde{x} + \tilde{l} \qquad (3.01)$$

což lze rozepsat jako

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_{11} & \underbrace{A_{12}}_{0} \\ A_2 & \underbrace{A_{21}}_{0} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \qquad (3.02)$$

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \qquad (3.03)$$

kde index $_1$ a $_2$ značí prvky příslušné etapy a index $_{12}$ prvky smíšené.

Společné vyrovnání obou etap můžeme provést jako

$$x = -\left(\tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{A}\right)^{-1} \cdot \tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{l} \qquad (3.04)$$

Prvky výrazu (*3.04*) lze rozepsat na

$$\underbrace{\tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{A}}_{N} = \left(\begin{array}{c:c:c} A_1^T P_1 A_1 + A_2^T P_2 A_2 & A P_1 A_{11} & A_2^T P_2 A_{22} \\ \hdashline A_{11}^T P_1 A_1 & A_{11}^T P_1 A_{11} & 0 \\ \hdashline A_{22}^T P_2 A_2 & 0 & A_{22}^T P_2 A_{22} \end{array}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \square & \square & 0 \\ \square & \square & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{1.etapa} + \underbrace{\begin{pmatrix} \square & 0 & \square \\ 0 & 0 & 0 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}}_{2.etapa} = N_1^E + N_2^E = N \qquad (3.05)$$

$$\underbrace{\tilde{A}^T \tilde{P} \tilde{l}}_{b} = \left(\begin{array}{c} A_1^T P_1 l_1 + A_2^T P_2 l_2 \\ \hdashline A_{11}^T P_1 l_1 \\ \hdashline A_{22}^T P_2 l_2 \end{array}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \square \\ \square \\ 0 \end{pmatrix}}_{1.etapa} + \underbrace{\begin{pmatrix} \square \\ 0 \\ \square \end{pmatrix}}_{2.etapa} = b_1^E + b_2^E = b \qquad (3.06)$$

kde index ^{E} značí expanzi příslušné matice nebo vektoru (Při expanzi jsou řádky a sloupce příslušné matice (nebo vektoru) určité etapy zpřeházeny a doplněny nulovými prvky tak, aby jejich konečný rozměr a pořadí odpovídal počtu a pořadí neznámých ve vektoru $\tilde{x}$ který obsahuje neznámé z obou etap).

Protože platí vztahy (viz (*3.04*) až (*3.06*))

$$\tilde{x}_i = -N_i^{-1} b_i = -Q_i b_i \qquad (3.07)$$

$$b_i = -N_i \tilde{x}_i \qquad (3.08)$$

můžeme pomocí expandovaných matic $\boldsymbol{N_i}$ a $\boldsymbol{b_i}$ provést společné vyrovnání všech neznámých. Jejich střední chyb určíme podle vztahu (*2.11*).

Následně můžeme určit celkovou aposteriorní střední chybu jednotkovou pro obě etapy podle vztahu (*3.09*).

$$m_{0;1,2} = \sqrt{\frac{v^T P v}{n-k}} = \sqrt{\frac{\left[l_i^T P_i l_i\right] + \left[x_i^T \cdot A_i^T P_i l_i\right]}{s_1 + s_2 + s_{1,2}}} = \sqrt{\frac{\left[m_{0,i}^2 \cdot s_i - x_i^T b_i\right] + \left[x_i^T \cdot b_i\right]}{s_1 + s_2 + s_{1,2}}} \qquad (3.09)$$

kde index i je číslo příslušné etapy
s_1 a s_2 je počet nadbytečných měření (stupňů volnosti) v první a druhé etapě
$s_{1,2}$ je počet společných neznámých pro obě etapy

4) odstranění pseudoměření ze systému normálních rovnic

Pokud jsou v jednotlivých etapách měření fixovány různé neznámé, bývá obvykle vhodné tento vliv před vlastním společným vyrovnáním odstranit. Protože platí

$$N_i x_i + b_i = \left(\tilde{N}_i + B^T P_B B\right) x_i + \left(\tilde{b}_i + B^T P_B b_B\right) = 0 \qquad (4.01)$$

můžeme vyjádřit „odfixovanou" matici $\tilde{N}_i$ a vektor $\tilde{b}_i$ jako

$$\tilde{N}_i = N_i - B^T P_B B \qquad (4.02)$$

$$\tilde{b}_i = b_i - B^T P_B b_B \qquad (4.03)$$

Sestavení matic ***B*** a ***P*** je popsáno ve vztazích (*2.02*) až (*2.07*).

Přehled výsledků

1) převod měřených převýšení na normální (Moloděnského)

převýšení		C_{γ}^{AB}	$C_{(g-\gamma)}^{AB}$	převýšení [*m*]	
z	na	[*mm*]	[*mm*]	měřené	normální
1	2	+0.08	-0.28	-8.59970	-8.59989
2	6	+0.07	+5.23	70.70820	70.71350
6	9	-0.62	-4.23	-66.75710	-66.76194
9	8	+0.07	+0.60	30.15020	30.15087
8	4	+0.77	+0.43	10.26830	10.26949
4	1	-0.37	-1.56	-35.77480	-35.77672
5	1	-0.03	-1.02	-21.26150	-21.26256
5	2	+0.05	-1.96	-29.85960	-29.86151
5	6	+0.14	+3.66	40.85010	40.85390
5	9	-0.45	-1.43	-25.90400	-25.90587
5	8	-0.41	+0.20	4.24420	4.24399
5	4	+0.34	+1.12	14.51300	14.51446
1	6	+0.17	+3.50	62.11410	62.11777
6	8	-0.58	-1.99	-36.60750	-36.61007
8	1	+0.36	-0.33	-25.50800	-25.50797

2) vyrovnání druhé etapy

počet neznámých $k = 6$
počet zprostředkujících (měření) $n = 15$

apriorní $m_{0;2} = 1.00$ *mm*
aposteriorní $m_{0;2} = 0.89$ *mm*

Vyrovnané výšky a jejich střední chyby

bod	výška [*m*]	m_i [*mm*]
1	230.12340	1.00
2	221.52481	1.26
4	265.90032	1.25
5	251.38609	1.18
6	292.24058	1.19
8	255.63067	1.19
9	225.47951	1.27

Vyrovnaná převýšení a jejich střední chyby

převýšení		převýšení [*m*]		váha	opravy		apriorní	aposteriorní
z	na	normální	vyrovnané	p_i	v_1 [*mm*]	v_2 [*mm*]	m_i [*mm*]	m_i [*mm*]
1	2	-8.59989	-8.59859	0.80	+1.302	+1.302	1.12	0.77
2	6	70.71350	70.71577	0.54	+2.271	+2.271	1.36	0.80
6	9	-66.76194	-66.76107	1.13	+0.875	+0.875	0.94	0.67
9	8	30.15087	30.15116	0.76	+0.294	+0.294	1.14	0.71
8	4	10.26949	10.26965	1.07	+0.154	+0.154	0.96	0.69
4	1	-35.77672	-35.77692	0.53	-0.198	-0.198	1.37	0.75
5	1	-21.26256	-21.26269	0.73	-0.131	-0.131	1.17	0.62
5	2	-29.86151	-29.86128	0.82	+0.229	+0.229	1.10	0.76
5	6	40.85390	40.85449	0.77	+0.597	+0.597	1.14	0.62
5	9	-25.90587	-25.90657	1.10	-0.700	-0.700	0.95	0.67
5	8	4.24399	4.24459	0.81	+0.598	+0.598	1.11	0.60
5	4	14.51446	14.51424	1.21	-0.224	-0.224	0.91	0.67
1	6	62.11777	62.11718	0.98	-0.586	-0.586	1.01	0.65
6	8	-36.61007	-36.60991	0.70	+0.166	+0.166	1.19	0.66
8	1	-25.50797	-25.50727	0.94	+0.701	+0.701	1.03	0.65

3) společné vyrovnání první a druhé etapy

Výsledné vyrovnané výšky a jejich střední chyby

bod	výška [*m*]	m_i [*mm*]
1	230.12340	1.00
2	221.52541	1.20
3	268.91448	1.37
4	265.90016	1.24
5	251.38584	1.16
6	292.24050	1.16
7	259.23780	1.34
8	255.63053	1.19
9	225.47928	1.22
10	245.07415	1.34

celková aposteriorní střední chyba jednotková $m_{0;1,2} = 0.69$ *mm*

Závěr:
Veškeré výpočty byly provedeny v programu Matlab.
Dvojím výpočtem oprav při samostatném vyrovnání druhé etapy byly získány stejné hodnoty, takže tyto výsledky můžeme považovat za správné.

Exapolis, dne 12.10.2003
Zdeněk Nejedlý

Zdeněk Nejedlý