

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ - OBOR GEODÉZIE A KARTOGRAFIE
KATEDRA VYŠŠÍ GEODÉZIE

název předmětu

VYŠŠÍ GEODÉZIE 11

číslo úlohy

název úlohy

2

Referenční koule, referenční elipsoid

školní rok

semestr

skupina

zpracoval

datum

e-mail

2002/03

6

64

Zdeněk Nejedlý

20.3.2003

rsc@email.cz

Zadání:

Příklad 2.1

Dopočti pomocí vět sférické trigonometrie zbývající prvky sférického trojúhelníku, znáš-li:

1) (sss) délky všech stran s_1 , s_2 , a s_3

$$s_1 = 33673.974 \text{ m} \quad s_2 = 26690.500 \text{ m} \quad s_3 = 34126.366 \text{ m}$$

2) (uuu) všechny vrcholové úhly ω_1 , ω_2 a ω_3

$$\omega_1 = 55^\circ 09' 35.62'' \quad \omega_2 = 54^\circ 05' 43.82'' \quad \omega_3 = 70^\circ 44' 42.86''$$

3) (sus) délku dvou stran s_1 a s_2 a úhel ω_3 jimi sevřený

$$s_1 = 30950.490 \text{ m} \quad s_2 = 40663.687 \text{ m} \quad \omega_3 = 49^\circ 56' 45.23''$$

4) (usu) délku jedné strany s_1 a dva úhly ω_2 a ω_3 k ní přilehlé

$$\omega_2 = 61^\circ 13' 15.71'' \quad \omega_3 = 59^\circ 31' 05.90'' \quad s_1 = 34082.600 \text{ m}$$

5) (ssu) dva úhly ω_1 a ω_2 a délku s_1 proti prvnímu z nich

$$s_1 = 40151.557 \text{ m} \quad s_2 = 29773.263 \text{ m} \quad \omega_1 = 40^\circ 17' 07.88''$$

6) (suu) dvě strany s_1 a s_2 a úhel ω_1 proti první z nich

$$s_1 = 34460.797 \text{ m} \quad \omega_1 = 34^\circ 31' 30.85'' \quad \omega_2 = 29^\circ 50' 05.63''$$

Řeš na náhradní kouli o poloměru $6'378'000 \text{ m}$. Kromě všech zbývajících prvků trojúhelníku vypočti i sférický exces.

Příklad 2.1

Máme dány dvě ortodromy dvěma způsoby:

Ortodroma 1 je dána bodem A o zeměpisných souřadnicích $[\varphi, \lambda]$ a azimutem α v tomto bodě

$$\varphi_A = -85^\circ 52' 21.000'' \quad \lambda_A = 60^\circ 16' 34.000'' \quad \alpha_A = 221^\circ 24' 35.000''$$

Ortodroma 2 je dána dvojicí bodů B a C o známých souřadnicích

$$\varphi_B = -36^\circ 35' 50.000'' \quad \lambda_B = 130^\circ 41' 51.000''$$

$$\varphi_C = 61^\circ 57' 12.000'' \quad \lambda_C = -107^\circ 32' 33.000''$$

Spočti nejprve hodnoty charakterizující obě ortodromy:

- zeměpisné délky průsečíků ortodromy s rovníkem
- azimut ortodromy na rovníku
- zeměpisnou šířku a azimut v průsečíku s nultým poledníkem
- zeměpisnou šířku a délku nejsevernějšího bodu ortodromy
- zeměpisnou šířku a azimut v průsečíku s obratníkem Raka

Dále spočti zeměpisné souřadnice průsečíků obou ortodrom.

Příklad 2.3

Geodetická křivka je dána bodem A a azimutem shodným s minulým příkladem. Spočti hodnoty charakterizující geodetickou křivku:

- zeměpisnou šířku a azimut v průsečíku s nultým poledníkem
- zeměpisnou šířku nejsevernějšího bodu ortodromy

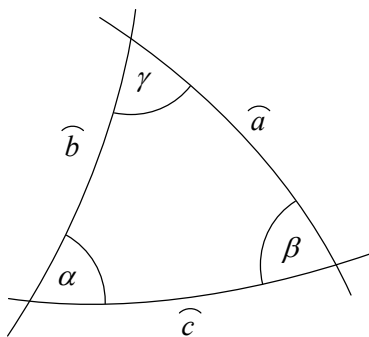
Řeš na Besselově elipsoidu.

Příklad 2.4

Graficky znázorni průběh meridiánového $M = f(\varphi)$, příčného $N = f(\varphi)$ a středního $R_m = f(\varphi)$ poloměru křivosti pro Besselův elipsoid pro $\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$.

Pro bod P o souřadnicích $[\varphi, \lambda]$ znázorni průběh poloměru křivosti normálového řezu R_α v azimutu $\alpha \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$.

Věty sférické trigonometrie pro kouli



Strany \hat{a} , \hat{b} a \hat{c} sférického trojúhelníku jsou oblouky hlavních kružnic o poloměru R a vypočtou se jako

$$\hat{a} = \frac{a}{R} \quad (0.1)$$

kde: a je délka oblouku o poloměru R se středovým úhlem \hat{a} v radiánech

věta sinová:

$$\frac{\sin \hat{a}}{\sin \alpha} = \frac{\sin \hat{b}}{\sin \beta} = \frac{\sin \hat{c}}{\sin \gamma} \quad (0.2)$$

věta kosinová pro stranu:

$$\cos \hat{a} = \cos \hat{b} \cdot \cos \hat{c} + \sin \hat{b} \cdot \sin \hat{c} \cdot \cos \alpha \quad (0.3)$$

věta kosinová pro úhel:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \hat{a} \quad (0.4)$$

věta sinuskosinová:

$$\sin \alpha \cdot \cos \hat{b} = \cos \beta \cdot \sin \gamma + \sin \beta \cdot \cos \gamma \cdot \cos \hat{a} \quad (0.5)$$

Neperovy analogie pro stranu:

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{c}}{2} \quad (0.6)$$

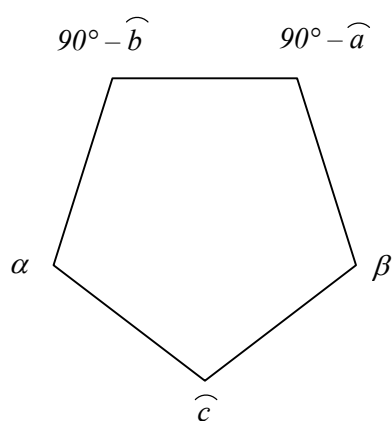
$$\operatorname{tg} \frac{\hat{a} - \hat{b}}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{c}}{2} \quad (0.7)$$

Neperovy analogie pro úhel:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\cos \frac{\hat{a} - \hat{b}}{2}}{\cos \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \quad (0.8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin \frac{\hat{a} - \hat{b}}{2}}{\sin \frac{\hat{a} + \hat{b}}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \quad (0.9)$$

Neperovo pravidlo:



Pokud přeponu \hat{c} , úhly α a β a doplňky stran $(90^\circ - \hat{a})$ a $(90^\circ - \hat{b})$ napíšeme k vrcholům pětiúhelníku v pořadí jako na sousedním obrázku, potom platí:

kosinus libovolného prvku je roven součinu sinů dvou prvků protějších

nebo

součinu kotangent dvou prvků sousedních.

Například:

$$\cos \hat{c} = \sin(90^\circ - \hat{a}) \cdot \sin(90^\circ - \hat{b}) = \cos \hat{a} \cdot \cos \hat{b} = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \beta$$

Clairautova věta:

$$R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha = R \cdot \cos \varphi_{MAX} = konst. \quad (0.10)$$

kde: φ je zeměpisná šířka

α je azimut v bodě o dané zeměpisné šířce

Sférický exces ε :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + \varepsilon \quad (0.11)$$

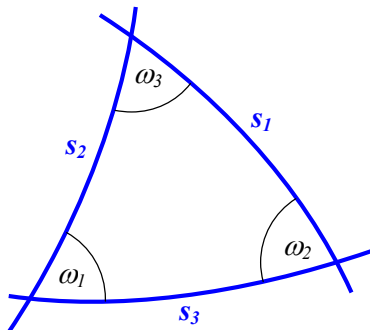
$$\varepsilon = \frac{P}{R^2} \quad (0.12)$$

kde: P je plocha sférického trojúhelníku

Teoretické řešení:

a) Prvky sférického trojúhelníku na kouli

Případ SSS (znám s_1, s_2 a s_3)

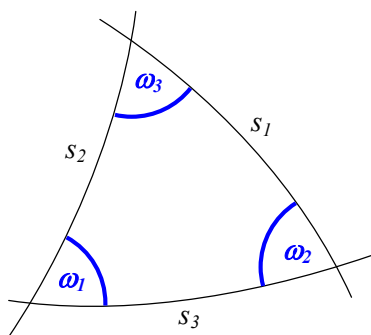


$$\omega_1 = \rho \cdot \arccos \left(\frac{\cos \hat{s}_1 - \cos \hat{s}_2 \cdot \cos \hat{s}_3}{\sin \hat{s}_2 \cdot \sin \hat{s}_3} \right) \quad (1.1)$$

$$\omega_2 = \rho \cdot \arccos \left(\frac{\cos \hat{s}_2 - \cos \hat{s}_1 \cdot \cos \hat{s}_3}{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \hat{s}_3} \right) \quad (1.2)$$

$$\omega_3 = \rho \cdot \arccos \left(\frac{\cos \hat{s}_3 - \cos \hat{s}_1 \cdot \cos \hat{s}_2}{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \hat{s}_2} \right) \quad (1.3)$$

Případ UUU (znám ω_1, ω_2 a ω_3)



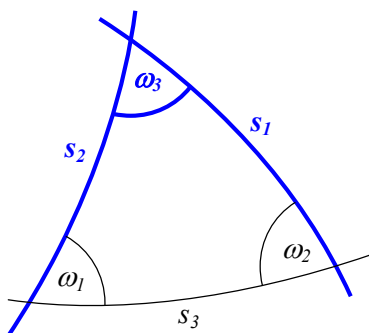
$$s_1 = R \cdot \arccos \left(\frac{\cos \omega_1 + \cos \omega_2 \cdot \cos \omega_3}{\sin \omega_2 \cdot \sin \omega_3} \right) \quad (1.4)$$

$$s_2 = R \cdot \arccos \left(\frac{\cos \omega_2 + \cos \omega_1 \cdot \cos \omega_3}{\sin \omega_1 \cdot \sin \omega_3} \right) \quad (1.5)$$

$$s_3 = R \cdot \arccos \left(\frac{\cos \omega_3 + \cos \omega_1 \cdot \cos \omega_2}{\sin \omega_1 \cdot \sin \omega_2} \right) \quad (1.6)$$

kde R je poloměr náhradní koule

Případ SUS (znám s_1, ω_3 a s_2)

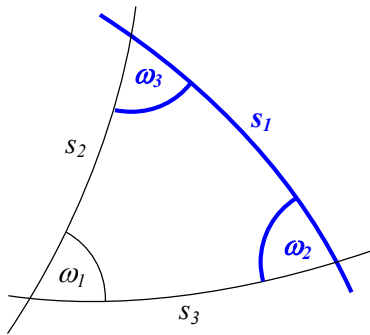


$$s_3 = R \cdot \arccos (\cos \hat{s}_1 \cdot \cos \hat{s}_2 + \sin \hat{s}_1 \cdot \sin \hat{s}_2 \cdot \cos \omega_3) \quad (1.7)$$

$$\omega_1 = \rho \cdot \arcsin \left(\frac{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \omega_3}{\sin \hat{s}_3} \right) \quad (1.8)$$

$$\omega_2 = \rho \cdot \arcsin \left(\frac{\sin \hat{s}_2 \cdot \sin \omega_3}{\sin \hat{s}_3} \right) \quad (1.9)$$

Případ USU (znám ω_2, s_1 a ω_3)

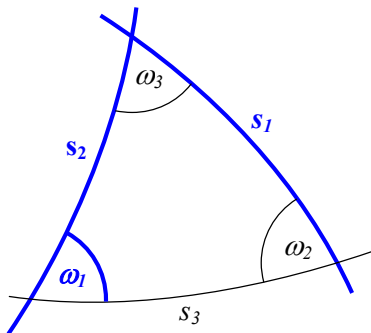


$$\omega_1 = \rho \cdot \arccos(-\cos \omega_2 \cdot \cos \omega_3 + \sin \omega_2 \cdot \sin \omega_3 \cdot \cos \hat{s}_1) \quad (1.10)$$

$$s_2 = R \cdot \arcsin\left(\frac{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \omega_2}{\sin \omega_1}\right) \quad (1.11)$$

$$s_3 = R \cdot \arcsin\left(\frac{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \omega_3}{\sin \omega_1}\right) \quad (1.12)$$

Případ SSU (znám s_1, s_2 a ω_1)

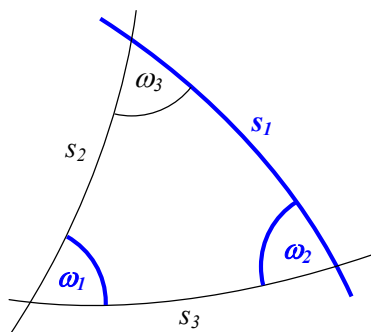


$$\omega_2 = \rho \cdot \arcsin\left(\frac{\sin \hat{s}_2 \cdot \sin \omega_1}{\sin \hat{s}_1}\right) \quad (1.13)$$

$$s_3 = 2 \cdot R \cdot \arctg\left(\left(\tg \frac{\hat{s}_1 + \hat{s}_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{\cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}{\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}\right)\right) \quad (1.14)$$

$$\omega_3 = \rho \cdot \arccos\left(\frac{\cos \hat{s}_3 - \cos \hat{s}_1 \cdot \cos \hat{s}_2}{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \hat{s}_2}\right) \quad (1.15)$$

Případ SUU (znám s_1, ω_2 a ω_1)



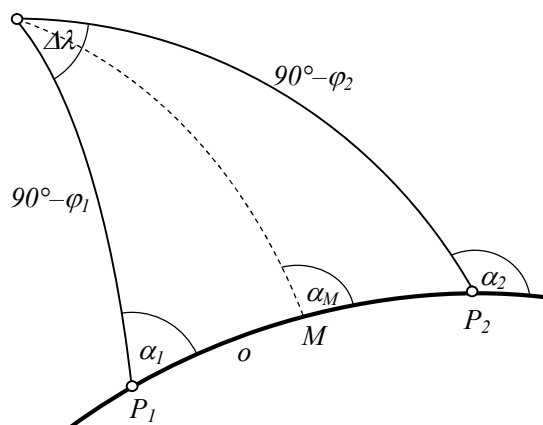
$$s_2 = R \cdot \arcsin\left(\frac{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \omega_2}{\sin \omega_1}\right) \quad (1.16)$$

$$s_3 = 2 \cdot R \cdot \arctg\left(\left(\tg \frac{\hat{s}_1 + \hat{s}_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{\cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}{\cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}\right)\right) \quad (1.17)$$

$$\omega_3 = \rho \cdot \arccos\left(\frac{\cos \hat{s}_3 - \cos \hat{s}_1 \cdot \cos \hat{s}_2}{\sin \hat{s}_1 \cdot \sin \hat{s}_2}\right) \quad (1.18)$$

b) Ortodroma na kouli

Jedná se o nejkratší spojnici dvou bodů na kouli. Jde o hlavní kružnici (leží v rovině procházející středem koule), takže vždy dva body ortodromy jsou navzájem středově souměrné, díky čemuž lze snadno spočítat protilehlý průsečík (u elipsoidu toto neplatí). V případě gnómonické projekce se ortodroma zobrazí jako přímka.



Pro výpočty s ortodromu je třeba, abychom v jednom jejím bodě znali zeměpisné souřadnice φ a λ a azimut α . Pokud místo toho známe dva body ležící na ortodromě, můžeme azimut pro počáteční bod P_1 dopočítat podle následujícího vztahu:

Azimut v bodě P_1

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\cos \varphi_2 \cdot \sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin o} \quad (2.1)$$

$$\text{kde } o = \arccos(\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) \quad (2.2)$$

Průsečíky s rovnoběžkou nebo poledníkem je pak možno spočítat pomocí sférické trigonometrie jako:

Dopočet šířky φ_M při známé délce λ_M (průsečík s rovnoběžkou)

$$\alpha_M = \arccos(\cos \alpha_1 \cdot \cos(\lambda_M - \lambda_1) - \sin \alpha_1 \cdot \sin(\lambda_M - \lambda_1) \cdot \sin \varphi_1) \quad (2.3)$$

$$\varphi_M = \arccos \frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos \varphi_1}{\sin \alpha_M} \quad (2.4)$$

Dopočet délky λ_M při známé šířce φ_M (průsečík s poledníkem)

$$\alpha_M = \arcsin \frac{\cos \varphi_1 \cdot \sin \alpha_1}{\cos \varphi_M} \quad (2.5)$$

$$\lambda_M = \lambda_1 + 2 \cdot \arctg \frac{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_M}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1 + 180^\circ - \alpha_M}{2} \cdot \cos \left(90^\circ - \frac{\varphi_1 + \varphi_M}{2} \right)} \quad (2.6)$$

Pro určení nejsevernějšího bodu ortodromy použijeme Clairautovu větu (rovnice (0.10)) pomocí níž můžeme určit zeměpisnou šířku. Zeměpisnou délku poté dopočteme podle rovnic (2.5) a (2.6).

Průsečík dvou ortodrom

Zřejmě nejsnazší způsob určení průsečíku dvou ortodrom je ten, že každou ortodromu proložíme rovinu která je určena dvěma body ortodromy a středem koule. Převod zeměpisných souřadnic na kartézské provedeme podle rovnic (2.7).

$$\begin{aligned}x_k &= R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda \\y_k &= R \cdot \cos \varphi \cdot \sin \lambda \\z_k &= R \cdot \sin \varphi\end{aligned}\tag{2.7}$$

Z vypočtených souřadnic jednotlivých bodů (*ortodromu 1* určí body *A* a *C*, *ortodromu 2* body *B* a *D*) určíme normálové vektory rovin *ASC* a *BSD* (viz rovnice (2.8))

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 = \vec{n}_{ASC} &= (y_A \cdot z_C - z_A \cdot y_C, z_A \cdot x_C - x_A \cdot z_C, x_A \cdot y_C - y_A \cdot x_C) = (xn_1, yn_1, zn_1) \\ \vec{n}_2 = \vec{n}_{BSD} &= (y_B \cdot z_D - z_B \cdot y_D, z_B \cdot x_D - x_B \cdot z_D, x_B \cdot y_D - y_B \cdot x_D) = (xn_2, yn_2, zn_2)\end{aligned}\tag{2.8}$$

jejichž vektorový součin (rovnice (2.9))

$$\vec{s}_p = (yn_1 \cdot zn_2 - zn_1 \cdot yn_2, zn_1 \cdot xn_2 - xn_1 \cdot zn_2, xn_1 \cdot yn_2 - yn_1 \cdot xn_2) = (s_1, s_2, s_3)\tag{2.9}$$

udává směrový vektor přímky procházející hledaným průsečíkem ortodrom a středem koule. Její parametrická rovnice je tato (rovnice (2.10)):

$$\begin{aligned}x &= 0 + t \cdot s_1 \\y &= 0 + t \cdot s_2 \\z &= 0 + t \cdot s_3\end{aligned}\tag{2.10}$$

Po dosazení parametru $t = \frac{R^2}{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ získáme přímo kartézské souřadnice *X*, *Y* a *Z* průsečíku této přímky a koule které můžeme pomocí rovnic (2.11) převést na souřadnice zeměpisné.

$$\begin{aligned}\varphi &= \arcsin \frac{Z}{R} \\ \lambda &= \text{signum}(Y) \cdot \arccos \frac{X}{R \cdot \cos \varphi}\end{aligned}\tag{2.11}$$

c) Geodetická křivka na elipsoidu

Geodetická křivka je v podstatě ortodroma (tedy nejkratší spojnice dvou bodů) na elipsoidu. Její hlavní normála je v každém bodě totožná s normálou plochy (elipsoidu) a její geodetická křivost je rovna nule. Díky tomu platí, že vyjdeme-li z bodu P_0 na rovníku pod azimutem α_0 a půjdeme po geodetické křivce, obecně se nedostaneme zpět do výchozího bodu, ale do bodu P_0'' který leží až 130 km západně od bodu P_0 . Přitom azimut α_i je stále větší nebo menší než 180° a na protilehlém průsečíku s rovníkem v bodě P_0' dosahuje maximální hodnoty $180^\circ - \alpha_0$.

Pro geodetickou křivku na libovolné rotační ploše platí Clairautova věta:

$$N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \alpha = N \cdot \cos \varphi_{MAX} = konst. \quad (3.1)$$

kde N je příčný poloměr křivosti (viz rovnice (4.1)).

Geodetickou křivku na ploše rotačního je třeba řešit pomocí následujících diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\cos \alpha}{M} \\ f_2 &= \frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sin \alpha}{N \cdot \cos \varphi} \\ f_3 &= \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\tan \varphi \cdot \sin \alpha}{N} \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde M je meridiánový poloměr křivosti (viz rovnice (4.3)).

Při použití výpočetní techniky je možné je iteračně řešit pomocí Rubte-Kuttovy metody čtvrtého řádu jako:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \frac{h}{6} (k_{\varphi_1} + 2k_{\varphi_2} + 2k_{\varphi_3} + k_{\varphi_4}) \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n + \frac{h}{6} (k_{\lambda_1} + 2k_{\lambda_2} + 2k_{\lambda_3} + k_{\lambda_4}) \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \frac{h}{6} (k_{\alpha_1} + 2k_{\alpha_2} + 2k_{\alpha_3} + k_{\alpha_4}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde h je konstantní hodnota iteračního kroku

a koeficienty k_{ξ_i} se určí jako

$$\begin{aligned} k_{\varphi_1} &= f_1(\varphi_n, \alpha_n) & k_{\lambda_1} &= f_2(\varphi_n, \alpha_n) \\ k_{\varphi_2} &= f_1\left(\varphi_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\varphi_1}, \alpha_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\alpha_1}\right) & k_{\lambda_2} &= f_2\left(\varphi_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\varphi_1}, \alpha_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\alpha_1}\right) \\ k_{\varphi_3} &= f_1\left(\varphi_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\varphi_2}, \alpha_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\alpha_2}\right) & k_{\lambda_3} &= f_2\left(\varphi_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\varphi_2}, \alpha_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\alpha_2}\right) \\ k_{\varphi_4} &= f_1(\varphi_n + h \cdot k_{\varphi_3}, \alpha_n + h \cdot k_{\alpha_3}) & k_{\lambda_4} &= f_2(\varphi_n + h \cdot k_{\varphi_3}, \alpha_n + h \cdot k_{\alpha_3}) \\ \\ k_{\alpha_1} &= f_3(\varphi_n, \alpha_n) \\ k_{\alpha_2} &= f_3\left(\varphi_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\varphi_1}, \alpha_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\alpha_1}\right) \\ k_{\alpha_3} &= f_3\left(\varphi_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\varphi_2}, \alpha_n + \frac{h}{2} \cdot k_{\alpha_2}\right) \\ k_{\alpha_4} &= f_3(\varphi_n + h \cdot k_{\varphi_3}, \alpha_n + h \cdot k_{\alpha_3}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Geodetická křivka se krokem h rozdělí na jednotlivé úseky v nichž se postupně z výchozích hodnot φ_n , λ_n a α_n určí koncové hodnoty φ_{n+1} , λ_{n+1} a α_{n+1} které se pro další úsek stanou hodnotami výchozími. Koeficienty k_{ξ_i} představují derivace rovnic (3.2) na počátku, $2 \times$ ve středu a na konci integračního kroku h .

Protože není možné určit před řešením správnou hodnotu kroku h , výpočet se několikrát opakuje. Při prvním výpočtu si hodnotu kroku h zvolíme libovolně a při dalších výpočtech použijeme polovinu hodnoty kroku z předchozího výpočtu. Toto se opakuje do té doby, dokud dosažený výsledek nemá požadovanou přesnost.

d) Poloměry křivosti na elipsoidu

Normálou k elipsoidu v bodě P je možné proložit nekonečně mnoho rovin které jsou kolmé na tečnou rovinu k elipsoidu v bodě P . Tyto roviny protínají elipsoid v normálových (vertikálních) řezech a dosahují dvou extrémních hodnot označovaných jako:

Meridiánový poloměr křivosti M (poloměr křivosti v poledníku (meridiánu)). Maximální poloměr křivosti, určí se podle vzorce

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \quad (4.1)$$

kde: a je hlavní poloosa elipsoidu

e^2 je první excentricita elipsoidu

φ je zeměpisná šířka bodu, pro který M určujeme

W je první geodetická funkce $W = \sqrt{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi}$ (4.2)

Příčný poloměr křivosti N (poloměr křivosti v rovině kolmé na poledník). Minimální poloměr křivosti, určí se podle vzorce

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \frac{a}{W} \quad (4.3)$$

Pomocí těchto hlavních poloměrů křivosti můžeme dále určit:

Střední poloměr křivosti R_m

$$R_m = \frac{a \cdot \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \sin^2 \varphi} = \frac{a \cdot \sqrt{1-e^2}}{W^2} = \sqrt{M \cdot N} \quad (4.4)$$

Poloměr křivosti normálového řezu v libovolném azimutu R_α

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N} \quad (4.5)$$

Poloměr rovnoběžky r

$$r = N \cdot \cos \varphi \quad (4.6)$$

Přehled výsledků:

a) Prvky sférického trojúhelníku na kouli

	S_1	S_2	S_3	ω_1	ω_2	ω_3	ε
sss	33 673,974 m	26 690,500 m	34 126,366 m	65° 55' 39.96"	46° 21' 34.18"	67° 42' 47.97"	0° 00' 02.11"
uuu	31 204,287 m	30 795,429 m	35 892,567 m	55° 09' 35.62"	54° 05' 43.82"	70° 44' 42.86"	0° 00' 02.30"
sus	30 950,490 m	40 663,687 m	31 490,725 m	48° 47' 25.87"	81° 15' 51.35"	49° 56' 45.23"	0° 00' 02.44"
usu	34 082,600 m	34 755,746 m	34 173,142 m	59° 15' 40.98"	61° 13' 15.71"	59° 31' 05.90"	0° 00' 02.59"
ssu	40 151,557 m	29 773,263 m	57 947,555 m	40° 17' 07.88"	28° 39' 02.23"	111° 03' 52.72"	0° 00' 02.83"
suu	34 460,797 m	30 249,193 m	54 815,188 m	34° 31' 30.85"	29° 50' 05.63"	115° 38' 25.90"	0° 00' 02.38"

b) Ortodroma na kouli

Ortodroma 1

Průsečík s rovníkem

$$\begin{aligned}\varphi &= 0^\circ 00' 00.00'' \\ \lambda &= -78^\circ 23' 16.69'' \\ \alpha &= 357^\circ 16' 16.46''\end{aligned}$$

Ortodroma 2

$$\begin{aligned}\varphi &= 0^\circ 00' 00.00'' \\ \lambda &= 153^\circ 42' 56.31'' \\ \alpha &= 27^\circ 46' 11.11''\end{aligned}$$

Průsečík s nultým poledníkem

$$\begin{aligned}\varphi &= -87^\circ 12' 51.52'' \\ \lambda &= 0^\circ 00' 00.00'' \\ \alpha &= 281^\circ 35' 55.25''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= -40^\circ 03' 46.29'' \\ \lambda &= 0^\circ 00' 00.00'' \\ \alpha &= 142^\circ 29' 56.32''\end{aligned}$$

Nejsevernější bod

$$\begin{aligned}\varphi &= 87^\circ 16' 16.46'' \\ \lambda &= -168^\circ 23' 16.68'' \\ \alpha &= 90^\circ 00' 00.00''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= 62^\circ 13' 48.89'' \\ \lambda &= -116^\circ 17' 03.69'' \\ \alpha &= 90^\circ 00' 00.00''\end{aligned}$$

Průsečík s obratníkem Raka

$$\begin{aligned}\varphi &= 23^\circ 30' 00.00'' \\ \lambda &= -79^\circ 34' 31.63'' \\ \alpha &= 357^\circ 01' 27.24''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi &= 23^\circ 30' 00.00'' \\ \lambda &= 166^\circ 57' 04.80'' \\ \alpha &= 30^\circ 32' 04.38''\end{aligned}$$

Průsečík ortodrom

$$\begin{aligned}\varphi &= 57^\circ 42' 28.46'' \\ \lambda &= -82^\circ 42' 47.29''\end{aligned}$$

c) Geodetická křivka na elipsoidu

Průsečík s rovníkem

$$\begin{aligned}\varphi &= 0^{\circ} 00' 00.00'' \\ \lambda &= -78^{\circ} 22' 25.00'' \\ \alpha &= 357^{\circ} 15' 43.66''\end{aligned}$$

Průsečík s nultým poledníkem

$$\begin{aligned}\varphi &= -87^{\circ} 12' 51.62'' \\ \lambda &= 0^{\circ} 00' 00.00'' \\ \alpha &= 281^{\circ} 35' 55.25''\end{aligned}$$

Nejsevernější bod

$$\begin{aligned}\varphi &= 87^{\circ} 16' 16.56'' \\ \lambda &= -168^{\circ} 23' 16.69'' \\ \alpha &= 270^{\circ} 00' 00.00''\end{aligned}$$

Kontrola výpočtu podle Clairautovy věty (viz rovnice 3.1)

Bod A = -304627.233953647900

Průsečík s rovníkem = -304627.233953840680

Průsečík s nultým poledníkem = -304627.233954211760

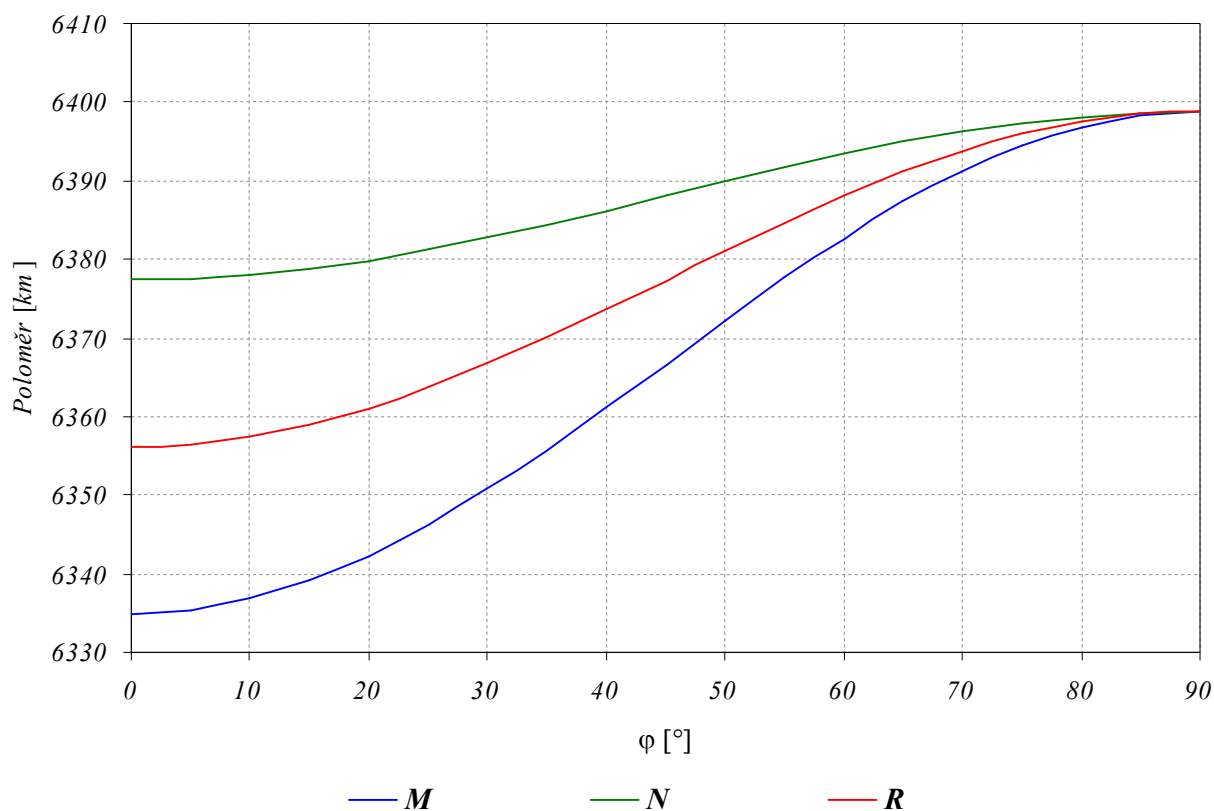
Nejsevernější bod = -304627.233954732830

všechny hodnoty se shodují na 11 platných cifer

d) Poloměry křivosti na elipsoidu

d.1) Průběh meridiánového M , příčného N a středního R_m poloměru křivosti

$\varphi [^\circ]$	$M [m]$	$N [m]$	$R [m]$
0	6 334 832,033	6 377 397,155	6 356 078,963
5	6 335 313,821	6 377 558,826	6 356 401,228
10	6 336 744,907	6 378 039,000	6 357 358,425
15	6 339 082,846	6 378 823,295	6 358 922,025
20	6 342 258,191	6 379 888,201	6 361 045,370
25	6 346 176,415	6 381 201,754	6 363 664,988
30	6 350 720,552	6 382 724,463	6 366 702,398
35	6 355 754,497	6 384 410,455	6 370 066,363
40	6 361 126,906	6 386 208,826	6 373 655,528
45	6 366 675,601	6 388 065,144	6 377 361,405
50	6 372 232,367	6 389 923,082	6 381 071,594
55	6 377 628,016	6 391 726,116	6 384 673,175
60	6 382 697,568	6 393 419,253	6 388 056,161
65	6 387 285,384	6 394 950,727	6 391 116,906
70	6 391 250,091	6 396 273,609	6 393 761,356
75	6 394 469,114	6 397 347,280	6 395 908,035
80	6 396 842,661	6 398 138,720	6 397 490,657
85	6 398 296,988	6 398 623,557	6 398 460,271
90	6 398 786,848	6 398 786,848	6 398 786,848



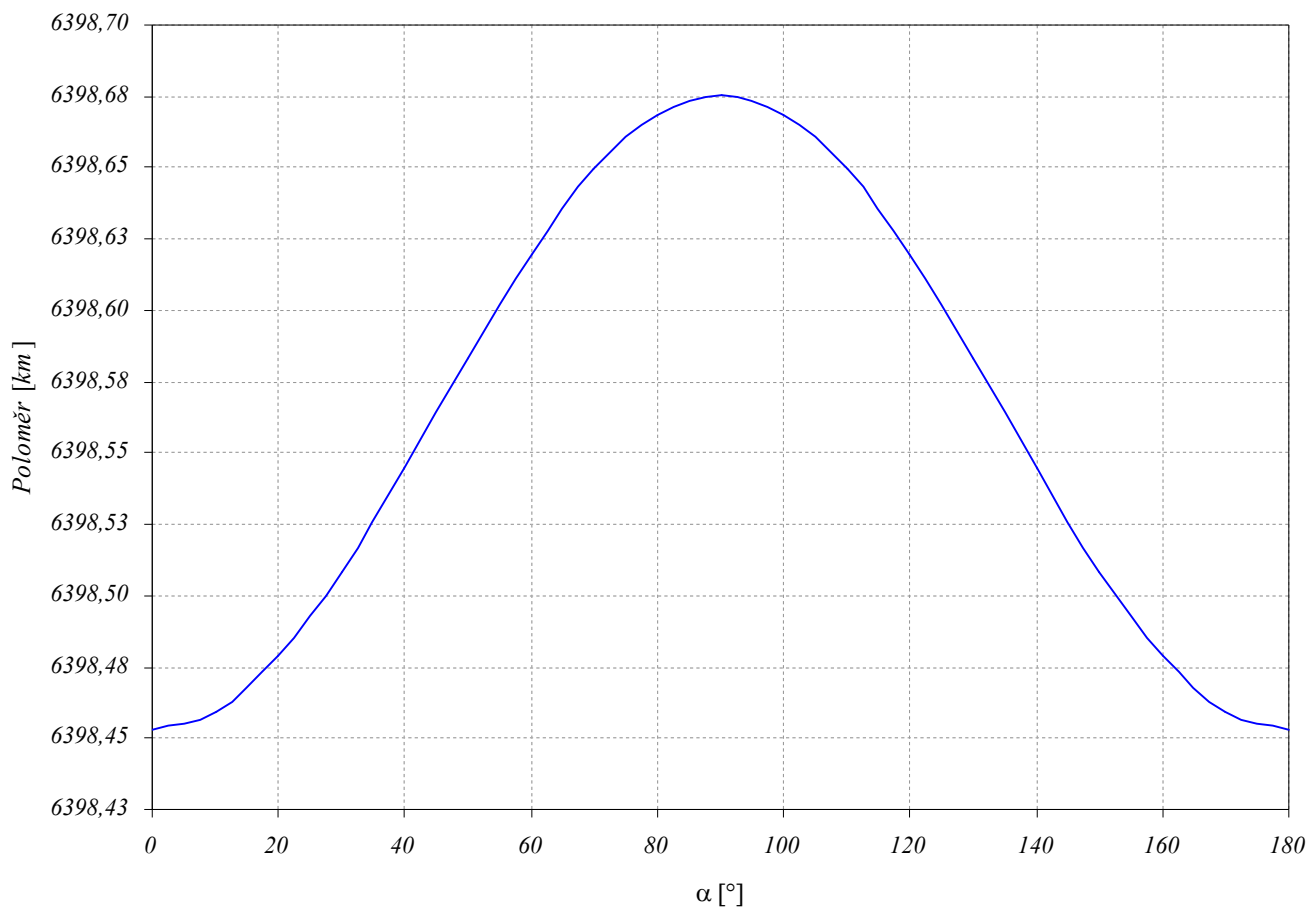
d.2) Průběh poloměru křivosti normálového řezu R_α

Poznámka: protože bod P nebyl v číselném zadání uveden, použil jsem jako jeho souřadnice souřadnice bodu A z části zadání týkající se výpočtu ortodromy na kouli.

Bod P

$\varphi = -85^\circ 52' 21,00''$
 $\lambda = 60^\circ 16' 34,00''$
 $M = 6\,398\,452,756\text{ m}$
 $N = 6\,398\,675,482\text{ m}$
 $R = 6\,398\,564,118\text{ m}$

$\alpha [^\circ]$	$R_\alpha [m]$
0	6 398 452,756
10	6 398 459,472
20	6 398 478,809
30	6 398 508,436
40	6 398 544,779
50	6 398 583,455
60	6 398 619,799
70	6 398 649,427
80	6 398 668,766
90	6 398 675,482
100	6 398 668,766
110	6 398 649,427
120	6 398 619,799
130	6 398 583,455
140	6 398 544,779
150	6 398 508,436
160	6 398 478,809
170	6 398 459,472
180	6 398 452,756



Závěr:

Všechny výpočty byly provedeny v programu Matlab a kontrolně i v programu Elipsoid od Petra Veselého. Všechny provedené kontroly byly úspěšně splněny, takže vypočtené výsledky považuji za správné.

Exapolis, dne 31.3.2003
Zdeněk Nejedlý

Zdeněk Nejedlý